수학 해설

2026학년도 대학수학능력시험

수학 영역 해설 공통 + 미적분

빠른 정답표 · 30문항

번호	정답	배점	난이도	단원
공통과목				
1	①	2	●○○○○	지수함수와 로그함수 › 지수
2	④	2	●○○○○	미분 › 미분계수와 도함수
3	⑤	3	●○○○○	수열 › 수열의 합
4	③	3	●○○○○	함수의 극한과 연속 › 함수의 연속
5	③	3	●○○○○	미분 › 미분계수와 도함수
6	②	3	●●○○○	지수함수와 로그함수 › 로그
7	⑤	3	●●○○○	적분 › 정적분의 활용
8	①	3	●●○○○	삼각함수 › 삼각함수의 뜻과 성질
9	④	4	●●●○○	미분 › 도함수의 활용
10	③	4	●●●○○	지수함수와 로그함수 › 지수함수와 로그함수
11	③	4	●●●○○	적분 › 정적분의 활용
12	②	4	●●●○○	수열 › 등차수열과 등비수열
13	⑤	4	●●●○○	미분 › 도함수의 활용
14	④	4	●●●●○	삼각함수 › 사인법칙과 코사인법칙
15	④	4	●●●●○	적분 › 정적분
16	9	3	●○○○○	수열 › 수열의 귀납적 정의
17	16	3	●○○○○	적분 › 부정적분
18	12	3	●○○○○	삼각함수 › 사인법칙과 코사인법칙
19	15	3	●●○○○	미분 › 도함수의 활용
20	130	4	●●●○○	수열 › 수열의 합과 일반항의 관계
21	65	4	●●●●○	함수의 극한과 연속 › 함수의 연속
22	457	4	●●●●○	지수함수와 로그함수 › 지수함수와 로그함수의 활용
선택과목 · 미적분				
23	③	2	●○○○○	미분법 › 삼각함수의 극한
24	④	3	●●○○○	적분법 › 치환적분법
25	③	3	●●○○○	수열의 극한 › 수열의 극한의 대소 관계
26	①	3	●●○○○	적분법 › 정적분의 활용(입체도형의 부피)
27	②	3	●●●○○	미분법 › 매개변수로 나타낸 함수의 미분법
28	⑤	4	●●●●○	적분법 › 치환적분법과 부분적분법(역함수의 정적분)
29	97	4	●●●●○	수열의 극한 › 급수(등비급수)
30	11	4	●●●●●	미분법 › 도함수의 활용(방정식의 실근의 개수)

문제 저작권: 한국교육과정평가원 / 해설: 자체 제작 · 문제 본문은 싣지 않으며, 문항 번호로 지칭합니다.

공통과목 1번 ~ 22번 · 22문항

1 수학Ⅰ › 지수함수와 로그함수 › 지수
2점 객관식 난이도 ●○○○○ 정답 ①

핵심 아이디어

밑이 다르면 지수법칙을 쓸 수 없으므로, 먼저 $9 = 3^2$ 으로 밑을 3 으로 통일한다.

풀이

밑을 맞추기 위해 9 를 3^2 으로 바꾼다.

$$9^{\frac{1}{4}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{2\times\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

이제 밑이 같으므로 곱은 지수의 합으로 계산한다.

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 3^0 = 1$$

따라서 정답은 ①이다.

실수 포인트

- $\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}$ 에서 지수를 더해 $3^{2+\frac{1}{4}}$ 로 계산하는 실수. 거듭제곱의 거듭제곱은 지수를 **곱한다**.
- $3^0 = 0$ 으로 착각하는 실수. 0 이 아닌 수의 0 제곱은 1 이다.

지수 계산은 밑을 통일하는 순간 절반이 끝난다.

2 수학II › 미분 › 미분계수와 도함수

2점 객관식 난이도 ●○○○○

정답 ④

핵심 아이디어

주어진 극한은 미분계수의 정의 그대로이므로 $f'(1)$ 을 구하면 된다.

풀이

$f(x) = 3x^3 + 4x + 1$ 에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

이다. 극한을 직접 전개하지 않고 도함수를 구해 대입하는 것이 가장 빠르다.

$$f'(x) = 9x^2 + 4$$

$$f'(1) = 9 + 4 = 13$$

따라서 정답은 ④이다.

실수 포인트

- 상수항 1 을 미분해서 1 로 남겨 두는 실수. 상수의 미분은 0 이다.
- $f(1) = 8$ 을 답으로 고르는 실수. 구하는 것은 함숫값이 아니라 미분계수다.

극한식의 모양을 보고 "미분계수의 정의"임을 바로 알아보는 것이 전부인 문제다.

3 수학I › 수열 › 수열의 합

3점 객관식 난이도 ●○○○○

정답 ⑤

핵심 아이디어

$\sum$ 는 덧셈·상수배에 대해 나누어 쓸 수 있다. 구하려는 $\sum a_k$ 를 한 덩어리로 보고 식을 정리한다.

풀이

조건은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2a_k - k) = 0$ 이다. $\sum$ 의 성질로 두 부분으로 나눈다.

$$2\sum_{k=1}^{4} a_k - \sum_{k=1}^{4} k = 0$$

두 번째 합은 직접 계산할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

따라서

$$2\sum_{k=1}^{4} a_k = 10, \qquad \sum_{k=1}^{4} a_k = 5$$

정답은 ⑤이다.

실수 포인트

- $\sum_{k=1}^{4} k$ 를 4 로 계산하는 실수(상수 k 로 착각). k 는 1 부터 4 까지 변하는 값이다.
- $2\sum a_k = 10$ 에서 2 로 나누는 것을 잊고 10 을 답으로 찾다가 보기에 없어 당황하는 경우.



각 항 a_k 를 알 수 없어도 합 전체는 구할 수 있다.

4 수학II › 함수의 극한과 연속 › 함수의 연속

3점 객관식 난이도

정답 ③

핵심 아이디어

두 식 모두 다항식이라 각 구간 안에서는 연속이다. 식이 바뀌는 경계 $x = 1$ 에서만 좌극한, 우극한, 함숫값이 같으면 된다.

풀이

$x < 1$ 에서 $f(x) = 3x - 2$, $x \geq 1$ 에서 $f(x) = x^2 - 3x + a$ 이다.

경계 $x = 1$ 에서의 값을 각각 구한다.

- 좌극한: $\lim_{x \to 1-} (3x - 2) = 1$
- 우극한과 함숫값: $\lim_{x \to 1+} (x^2 - 3x + a) = f(1) = 1 - 3 + a = a - 2$

연속이려면 이 값들이 같아야 하므로

$$a - 2 = 1, \qquad a = 3$$

따라서 정답은 ③이다.

실수 포인트

- $1 - 3 + a$ 를 $a + 2$ 로 계산하는 부호 실수.
- 좌극한을 구할 때 $x \geq 1$ 쪽 식에 대입하는 실수. $x \to 1-$ 는 $x < 1$ 쪽 식을 써야 한다.



구간별로 정의된 다항함수의 연속은 "경계에서 두 식의 값이 같다" 한 줄이면 된다.

5 수학II › 미분 › 미분계수와 도함수

3점 객관식 난이도 ●○○○○ 정답 ③

핵심 아이디어

두 다항식의 곱은 전개하지 말고 곱의 미분법 $(uv)' = u'v + uv'$ 을 쓴 뒤 바로 $x = 1$ 을 대입한다.

풀이

$u = x + 2$, $v = 2x^2 - x - 2$ 로 두면 $u' = 1$, $v' = 4x - 1$ 이므로

$$f'(x) = (2x^2 - x - 2) + (x + 2)(4x - 1)$$

정리하지 않고 $x = 1$ 을 바로 대입한다(대입이 목적이므로 전개는 불필요).

$$f'(1) = (2 - 1 - 2) + (3)(3) = -1 + 9 = 8$$

따라서 정답은 ③이다.

실수 포인트

- $f'(x) = u'v'$, 즉 $1 \times (4x - 1)$ 로 계산하는 실수. 곱의 미분은 각각 미분한 것의 곱이 아니다.
- $2 - 1 - 2$ 를 1 로 계산하는 부호 실수.

다른 풀이

전개하면 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ 이므로 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 4$, $f'(1) = 8$ 로 같은 값을 얻는다. 검산용으로 좋다.

대입할 값이 정해져 있으면 도함수를 예쁘게 정리할 필요가 없다.

6 수학I › 지수함수와 로그함수 › 로그

3점 객관식 난이도 ●●○○○ 정답 ②

핵심 아이디어

첫 조건으로 b 를 a 로 나타내면 두 번째 조건이 a 만의 식이 된다. 구하는 ab 도 a 의 거듭제곱으로 바뀐다.

풀이

1단계: b 를 a 로 나타내기. $\log_a b = 3$ 은 로그의 정의에 의해

$$b = a^3$$

2단계: 두 번째 조건에 대입. $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a^3}{a} = a^2$ 이므로

$$\log_3 a^2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 3^{\frac{1}{2}}$$

3단계: ab 구하기. $ab = a \cdot a^3 = a^4 = (a^2)^2$ 이므로

$$ab = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$$

4단계: 답 계산. $9 = 3^2$ 이므로

$$\log_9 ab = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2}$$

따라서 정답은 ②이다.

실수 포인트

- $\log_3 \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ 처럼 로그를 지수로 바꾸지 않고 곱으로 처리하는 실수.
- a 값($a = 3^{\frac{1}{4}}$)을 굳이 구한 뒤 b 를 따로 계산하다가 지수 계산에서 틀리는 경우. $ab = (a^2)^2$ 으로 묶으면 a 를 구할 필요가 없다.
- 마지막에 밑이 9 임을 잊고 $\log_3 3 = 1$ 로 답하는 실수.

다른 풀이

모두 밑이 3 인 로그로 바꾼다. $\log_3 a = p$ 라 하면 $\log_3 b = 3p$ 이고, 두 번째 조건은 $3p - p = \frac{1}{2}$ 이므로 $p = \frac{1}{4}$. 따라서 $\log_3 ab = 4p = 1$, $\log_9 ab = \frac{1}{2}\log_3 ab = \frac{1}{2}$.

문자가 둘이면 하나로 줄이는 것이 먼저다.

7 수학II › 적분 › 정적분의 활용

3점 객관식 난이도 ●●○○○ 정답 ⑤

핵심 아이디어

두 곡선은 $x = 0$ 에서만 만난다. 따라서 넓이는 $0 \le x \le 2$ 에서 (위 곡선) − (아래 곡선)을 적분한 값이다.

풀이

1단계: 교점 찾기. 두 식을 같다고 놓으면

$$x^2 + 3 = -\frac{1}{5}x^2 + 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{5}x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

두 곡선은 점 $(0, 3)$ 에서만 만난다. 그러므로 두 곡선과 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분은 $0 \le x \le 2$ 구간에 놓인다.

2단계: 위아래 판단. $x \neq 0$ 이면 $x^2 + 3 > 3 > -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 이므로 $y = x^2 + 3$ 이 항상 위에 있다.

3단계: 적분. 상수 3 은 빼면서 사라진다.

$$S = \int_0^2 \left\{ (x^2 + 3) - \left(-\frac{1}{5}x^2 + 3 \right) \right\} dx = \int_0^2 \frac{6}{5}x^2 \, dx$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{5}$$

따라서 정답은 ⑤이다.

실수 포인트

- 빼는 과정에서 $x^2 - \left(-\frac{1}{5}x^2 \right)$ 을 $\frac{4}{5}x^2$ 으로 계산하는 부호 실수. 음수를 빼므로 $\frac{6}{5}x^2$ 이다.
- 적분 구간을 -2 부터 2 로 잡는 실수. 경계가 되는 직선은 $x = 2$ 하나뿐이고, 다른 쪽 경계는 두 곡선의 교점 $x = 0$ 이다.

넓이 문제는 "어디서 어디까지, 누가 위인가" 두 가지만 정하면 계산은 짧다.

8 수학I › 삼각함수 › 삼각함수의 뜻과 성질

3점 객관식 난이도

정답 ①

핵심 아이디어

첫 조건은 $\tan\theta$ 의 값을, 둘째 조건은 $\cos\theta$ 의 부호를 알려 준다. 값의 크기와 부호(사분면)를 따로 결정한다.

풀이

1단계: 둘째 조건으로 부호 정하기. $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ 이므로

$$-\cos\theta>0 \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta<0$$

2단계: 첫 조건 정리. $\sin\theta+3\cos\theta=0$ 에서

$$\sin\theta=-3\cos\theta$$

$\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta=-3\cos\theta>0$ 이다. 즉 θ 는 제2사분면의 각이고, 답은 양수여야 한다.

3단계: 크기 구하기. $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}\sin\theta$ 를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에 대입하면

$$\sin^2\theta+\frac{1}{9}\sin^2\theta=1 \quad\Longrightarrow\quad \sin^2\theta=\frac{9}{10}$$

$\sin\theta>0$ 이므로

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

따라서 정답은 ①이다.

실수 포인트

- $\cos(\pi-\theta)=\cos\theta$ 로 잘못 변형해 $\cos\theta>0$ 으로 놓고, 부호가 반대인 $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 을 고르는 실수. 이 문제의 오답은 대부분 여기서 나온다.
- $\tan\theta=-3$ 까지만 구하고 사분면을 따지지 않는 경우. $\tan\theta<0$ 인 각은 제2사분면과 제4사분면 두 곳에 있으므로 둘째 조건이 꼭 필요하다.
- $\sin\theta$ 와 $\cos\theta$ 를 바꿔 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 계열의 값을 구하는 실수.

다른 풀이

$\tan\theta=-3$ 이므로 밑변 1, 높이 3, 빗변 $\sqrt{10}$ 인 직각삼각형을 떠올리면 $|\sin\theta|=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 이다. 제2사분면에서 $\sin\theta>0$ 이므로 같은 답을 얻는다.

삼각함수 값은 크기와 부호를 따로 구한다고 생각하면 실수가 줄어든다.

9 수학II › 미분 › 도함수의 활용

4점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ④

핵심 아이디어

수평선 $y=5$ 가 곡선에 접한다는 것은 접점에서 기울기가 0, 즉 **극값이** 5 라는 뜻이다. 극댓값과 극솟값 중 어느 쪽이 5 가 될 수 있는지 가려낸다.

풀이

1단계: 극값을 갖는 x 찾기.

$$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2=3(x+3a)(x-a)$$

$a>0$ 이므로 $-3a<a$ 이고, 삼차항의 계수가 양수이므로 $x=-3a$ 에서 극대, $x=a$ 에서 극소이다.

2단계: 극값 계산.

$$f(-3a)=-27a^3+27a^3+27a^3+4=27a^3+4$$
$$f(a)=a^3+3a^3-9a^3+4=-5a^3+4$$

3단계: 어느 극값이 5 인지 판단. 직선 $y=5$ 는 기울기가 0 이므로 접점에서 $f'(x)=0$ 이어야 하고, 따라서 접점은 $x=-3a$ 또는 $x=a$ 이다.

- 극솟값이 5 인 경우: $-5a^3+4=5$ 에서 $a^3=-\frac{1}{5}<0$. $a>0$ 에 모순이므로 불가능.
- 극댓값이 5 인 경우: $27a^3+4=5$ 에서 $a^3=\frac{1}{27}$, $a=\frac{1}{3}$. 조건에 맞는다.

4단계: $f(2)$ 계산. $a=\frac{1}{3}$ 이면 $3a=1$, $9a^2=1$ 이므로

$$f(x)=x^3+x^2-x+4,\qquad f(2)=8+4-2+4=14$$

따라서 정답은 ④이다.

실수 포인트

- 극솟값 쪽만 5 로 놓고 풀다가 a 가 음수로 나와 막히는 경우. 두 극값을 모두 확인하고 $a>0$ 조건으로 걸러야 한다.
- $f(-3a)$ 계산에서 $-9a^2\cdot(-3a)=+27a^3$ 의 부호를 틀리는 실수.
- $a=\frac{1}{3}$ 을 구하고 끝내는 실수. 묻는 값은 $f(2)$ 다.

"수평선이 접한다 = 극값"으로 번역할 수 있으면 평범한 계산 문제가 된다.

10 수학I › 지수함수와 로그함수 › 지수함수와 로그함수

4점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ③

핵심 아이디어

세 점 A, B, C 는 모두 같은 세로선 위에 있다. A 의 x 좌표를 t 로 놓으면 세 점의 좌표가 한꺼번에 정해지고, 두 조건이 각각 a^t 와 t 를 결정한다.

풀이

1단계: 좌표 설정. 곡선 $y = a^x - 2$ 의 점근선은 $y = -2$ 이다. A 의 x 좌표를 t 라 하면, A 가 제1사분면의 점이므로 $t > 0$ 이고 $a^t - 2 > 0$ 이다.

$$\mathrm{A}(t,\ a^t - 2), \qquad \mathrm{B}(t,\ 0), \qquad \mathrm{C}(t,\ -2)$$

2단계: $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 사용. 세 점이 세로로 놓여 있으므로 길이는 y 좌표의 차이다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = a^t - 2, \qquad \overline{\mathrm{BC}} = 2$$
$$a^t - 2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad a^t = 4$$

즉 A 의 y 좌표는 2 이고 $\overline{\mathrm{AC}} = 4$ 이다.

3단계: 넓이 조건 사용. 삼각형 AOC 에서 밑변을 세로 선분 AC 로 잡으면, 높이는 원점에서 직선 $x = t$ 까지의 거리 t 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4 \times t = 8 \quad \Longrightarrow \quad t = 4$$

4단계: a 구하기. $a^4 = 4$ 이고 $a > 1$ 이므로

$$a = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

5단계: 답. $\overline{\mathrm{OB}} = t = 4 = 2^2$ 이므로

$$a \times \overline{\mathrm{OB}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^2 = 2^{\frac{5}{2}}$$

따라서 정답은 ③이다.

실수 포인트

- 점근선을 x 축($y = 0$)으로 착각하는 실수. $y = a^x$ 를 y 축 방향으로 -2 만큼 옮겼으므로 점근선도 $y = -2$ 로 내려간다.
- 삼각형 AOC 의 넓이를 구할 때 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 로 잡는 실수. 꼭짓점은 A, O, C 이므로 밑변은 $\overline{\mathrm{AC}} = 4$ 이다.
- $a^4 = 4$ 에서 $a = 2^{\frac{1}{2}}$ 을 $a = 2$ 또는 $a = 1$ 로 처리하는 지수 실수.

같은 세로선 위의 점들은 x 좌표 하나만 문자로 두면 모든 길이가 그 문자로 표현된다.

11 수학II › 적분 › 정적분의 활용

4점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ③

핵심 아이디어

위치는 속도의 정적분, 운동 방향의 변화는 속도의 **부호 변화**, 움직인 거리는 $|v(t)|$ 의 정적분이다. 세 보기가 이 세 가지를 하나씩 묻는다.

풀이

$v(t) = t^2 - kt + 4$ 이고, 출발점이 원점이므로 시각 t 에서의 위치는 $\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds$ 이다.

ㄱ ($k = 0, t = 1$ 에서의 위치). $v(t) = t^2 + 4$ 이므로

$$\int_0^1 (t^2 + 4)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + 4t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}$$

보기의 값과 같다. ㄱ은 옳다.

ㄴ ($k=3$, 운동 방향이 바뀌는 횟수). 운동 방향이 바뀌려면 $v(t)$ 의 부호가 바뀌어야 한다. $v(t)=t^2-3t+4$ 의 판별식은

$$D=9-16=-7<0$$

이므로 $v(t)=0$ 인 시각이 없고, 모든 t 에서 $v(t)>0$ 이다. 점 P 는 한 방향으로만 움직이므로 방향은 한 번도 바뀌지 않는다. ㄴ은 옳지 않다.

ㄷ ($k=5$, $t=0$ 부터 $t=2$ 까지 움직인 거리). $v(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$ 이므로

- $0\le t<1$ 에서 $v(t)>0$
- $1<t\le 2$ 에서 $v(t)<0$

$t=1$ 에서 방향이 바뀌므로 구간을 나누어 계산한다. $V(t)=\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{5t^2}{2}+4t$ 라 하면

$$V(0)=0,\qquad V(1)=\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4=\frac{11}{6},\qquad V(2)=\frac{8}{3}-10+8=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 |v(t)|\,dt &= \{V(1)-V(0)\}+\{V(1)-V(2)\}\\ &= \frac{11}{6}+\left(\frac{11}{6}-\frac{4}{6}\right)=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3\end{aligned}$$

보기의 값과 같다. ㄷ은 옳다.

옳은 것은 ㄱ, ㄷ이므로 정답은 ③이다.

실수 포인트

- ㄷ에서 절댓값 없이 $\displaystyle\int_0^2 v(t)\,dt=\frac{2}{3}$ 을 구해 "거리가 3 이 아니다"라고 판단하는 실수. $\dfrac{2}{3}$ 은 위치의 변화량이고, 움직인 거리는 방향이 바뀌는 $t=1$ 에서 나누어 더해야 한다.
- ㄴ에서 판별식을 확인하지 않고 "이차식이니 부호가 바뀌겠지"라고 넘겨짚는 실수.
- ㄴ에서 $v(t)=0$ 인 시각이 있더라도 중근이면 부호가 바뀌지 않는다는 점도 함께 기억해 두자(예: $k=4$ 이면 $v(t)=(t-2)^2\ge 0$).

"위치의 변화량"과 "움직인 거리"는 절댓값 하나 차이지만 답은 전혀 달라진다.

12 수학Ⅰ › 수열 › 등차수열과 등비수열

4점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ②

핵심 아이디어

$a_4+a_7+a_{10}$ 의 각 항은 $a_1+a_4+a_7$ 의 각 항에 r^3 을 곱한 것이다. 두 묶음의 비에서 r^3 이 바로 나온다.

풀이

공비를 r 라 하고 $S=a_1+a_4+a_7$ 로 둔다.

1단계: 조건 분리. $2S=a_4+a_7+a_{10}=6$ 이므로

$$S=3,\qquad a_4+a_7+a_{10}=6$$

2단계: r^3 구하기. $a_4=a_1r^3$, $a_7=a_4r^3$, $a_{10}=a_7r^3$ 이므로

$$a_4 + a_7 + a_{10} = r^3(a_1 + a_4 + a_7) = r^3 S$$

$$3r^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad r^3 = 2$$

3단계: a_1 구하기. $a_4 = a_1 r^3 = 2a_1$, $a_7 = a_1 r^6 = 4a_1$ 이므로

$$S = a_1 + 2a_1 + 4a_1 = 7a_1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{3}{7}$$

4단계: a_{10} 계산. $r^9 = (r^3)^3 = 8$ 이므로

$$a_{10} = a_1 r^9 = \frac{3}{7} \times 8 = \frac{24}{7}$$

따라서 정답은 ②이다.

실수 포인트

- r 자체($r = \sqrt[3]{2}$)를 구하려고 시간을 쓰는 것. 필요한 것은 r^3 뿐이고, $r^6 = 4$, $r^9 = 8$ 로 모두 해결된다.
- r^9 을 $r^3 \times 3 = 6$ 으로 계산하는 실수. $r^9 = (r^3)^3 = 8$ 이다.
- 조건을 $a_1 + a_4 + a_7 = 6$ 으로 잘못 읽는 실수. 6 은 그 **두 배**와 뒤쪽 묶음의 값이다.

다른 풀이

a_{10} 을 직접 묶음에서 꺼낼 수도 있다. $a_4 + a_7 + a_{10} = 6$ 에서 $a_4 = \frac{a_{10}}{4}$, $a_7 = \frac{a_{10}}{2}$ 이므로 $a_{10}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) = 6$, $a_{10} = \frac{24}{7}$.



첨자가 같은 간격으로 밀려 있으면 "통째로 공비 몇 제곱을 곱한 것"으로 본다.

13 수학II › 미분 › 도함수의 활용

4점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ⑤

핵심 아이디어

$g(x)$ 를 전개하지 않고 곱의 미분법으로 $g'(1)$ 만 구한다. 두 접선과 y 축이 만드는 도형은 y 축 위의 변을 밑변으로 하는 삼각형이다.

풀이

발상의 출발점. 넓이를 구하려면 두 접선의 방정식이 필요하고, 접선은 "지나는 점 + 기울기"로 정해진다. 점은 이미 주어졌으므로 미분계수 두 개만 구하면 된다.

1단계: 접선 l. $f(x) = x^2 - 4x - 3$ 에서 $f'(x) = 2x - 4$ 이므로 $f'(1) = -2$. 점 $(1, -6)$ 을 지나므로

$$l : \ y = -2(x-1) - 6 = -2x - 4$$

2단계: 접선 m. $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에 곱의 미분법을 적용한다.

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

$x = 1$ 을 대입하면 $f(1) = -6$, $f'(1) = -2$ 이므로

$$g'(1) = (1)(-6) + (-1)(-2) = -6 + 2 = -4$$

접점 확인: $g(1) = (1-2) \cdot (-6) = 6$ 으로 주어진 점 $(1, 6)$ 과 맞는다. 따라서

$$m : \ y = -4(x-1) + 6 = -4x + 10$$

3단계: 삼각형의 세 꼭짓점.

- l 의 y 절편: $(0, -4)$
- m 의 y 절편: $(0, 10)$
- l 과 m 의 교점: $-2x - 4 = -4x + 10$ 에서 $2x = 14$, $x = 7$ (이때 $y = -18$)

4단계: 넓이. y 축 위의 변을 밑변으로 잡으면 길이는 $10 - (-4) = 14$, 높이는 교점에서 y 축까지의 거리, 즉 교점의 x 좌표 7 이다.

$$\frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$$

따라서 정답은 ⑤이다.

검토. 두 직선의 기울기가 -2, -4 로 서로 달라 한 점에서 만나고, 교점의 x 좌표가 0 이 아니므로 실제로 삼각형이 만들어진다.

실수 포인트

- $g'(1)$ 을 $(3x^2 - 2) \cdot f'(x)$ 꼴, 즉 각각 미분한 것의 곱 $1 \times (-2) = -2$ 로 계산하는 실수. 그러면 두 접선이 평행해져 도형이 생기지 않는다.
- $(x^3 - 2x)$ 에 $x = 1$ 을 넣은 값 -1 의 부호를 놓쳐 $g'(1) = -6 - 2 = -8$ 로 계산하는 실수.
- 높이를 교점의 y 좌표(18)로 잡는 실수. 밑변이 y 축 위에 있으므로 높이는 x **좌표**다.
- $g(x)$ 를 5차식으로 전개하느라 시간을 쓰는 것. 필요한 것은 $g'(1)$ 한 값뿐이다.

곱으로 주어진 함수의 미분계수는 전개 없이 $f(1)$, $f'(1)$ 두 숫자만으로 끝난다.

14 수학I › 삼각함수 › 사인법칙과 코사인법칙

4점 객관식 난이도 ●●●●○

정답 ④

핵심 아이디어

구하는 $\overline{GH}$ 는 세 점 C, E, G 를 지나는 원의 현이고, 그 현에 대한 원주각 $\angle HCG$ 의 크기를 안다. 따라서 **그 원의 반지름만 알면 사인법칙으로 끝난다.** 반지름은 삼각형 CEG 에서 구하고, 그에 필요한 각은 세 변의 길이를 모두 아는 삼각형 ACG 에서 얻는다.

풀이

발상의 출발점 — 거꾸로 계획 세우기.

1. $\overline{GH} = 2R\sin(\angle HCG)$ (R 는 C, E, G 를 지나는 원의 반지름) ← R 가 필요
2. R 는 삼각형 CEG 에서 $\dfrac{\overline{EG}}{\sin(\angle ECG)} = 2R$ ← $\overline{EG}$ 와 $\angle ECG$ 가 필요
3. E 가 선분 AC 위에 있으므로 $\angle ECG = \angle ACG$ ← 삼각형 ACG 는 세 변을 모두 안다

이 순서를 거꾸로 따라 계산한다.

1단계: 기본 길이 정리. 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고

$$\sin(\angle BAC) = \frac{4}{5}, \qquad \cos(\angle BAC) = \frac{3}{5}$$

D 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 내분하므로 $\overline{AD} = 2$, 즉 중심이 A 인 원의 반지름은 2 이다. E, G 가 이 원 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AG}} = 2, \qquad \overline{\mathrm{CE}} = 5 - 2 = 3$$

2단계: 삼각형 ACG 에서 $\angle \mathrm{ACG}$. 세 변이 $\overline{\mathrm{AC}} = 5$, $\overline{\mathrm{AG}} = 2$, $\overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{6}$ 이므로 코사인법칙에서

$$\cos(\angle \mathrm{ACG}) = \frac{5^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{45}{20\sqrt{6}} = \frac{9}{4\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\sin(\angle \mathrm{ACG}) = \sqrt{1 - \frac{54}{64}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

(삼각형의 내각이므로 사인값은 양수이다.)

3단계: 삼각형 CEG 에서 $\overline{\mathrm{EG}}$. $\angle \mathrm{ECG} = \angle \mathrm{ACG}$ 이고 $\overline{\mathrm{CE}} = 3$, $\overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{6}$ 이므로 코사인법칙에서

$$\overline{\mathrm{EG}}^2 = 3^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8} = 33 - 27 = 6$$

$$\overline{\mathrm{EG}} = \sqrt{6}$$

4단계: 원의 반지름. 삼각형 CEG 의 외접원이 바로 C, E, G 를 지나는 원이다. 사인법칙에서

$$2R = \frac{\overline{\mathrm{EG}}}{\sin(\angle \mathrm{ECG})} = \sqrt{6} \times \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{60}}{10} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$$

5단계: $\overline{\mathrm{GH}}$. H 도 같은 원 위의 점이므로 삼각형 HCG 의 외접원도 이 원이다. $\angle \mathrm{HCG} = \angle \mathrm{BAC}$ 이므로 사인법칙에서

$$\overline{\mathrm{GH}} = 2R\sin(\angle \mathrm{HCG}) = \frac{8\sqrt{15}}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}$$

따라서 정답은 ④이다.

검토. $\overline{\mathrm{GH}} \approx 4.96$ 이고 원의 지름은 $2R \approx 6.20$ 이므로 현의 길이로서 타당하다. 또 좌표로 확인하면(A 를 원점, $\mathrm{B}(3, 0)$, $\mathrm{C}(3, 4)$) $\overline{\mathrm{AG}} = 2$, $\overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{6}$ 인 점 G 에 대해 $\overline{\mathrm{EG}} = \sqrt{6}$ 이 실제로 성립한다.

실수 포인트

- 원이 두 개라는 점을 놓치는 것. $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AG}} = 2$ 는 **중심이 A 인 원**에서 나오고, 사인법칙의 R 는 **C, E, G 를 지나는 원**의 반지름이다. $R = 2$ 로 놓으면 안 된다.
- $\angle \mathrm{ECG}$ 와 $\angle \mathrm{ACG}$ 가 같은 각임을 알아채지 못해 삼각형 CEG 에서 막히는 경우. E 가 선분 AC 위의 점이라는 사실이 두 삼각형을 이어 주는 다리다.
- 4단계에서 대변을 잘못 짝짓는 실수. $\angle \mathrm{ECG}$ 의 대변은 $\overline{\mathrm{EG}}$ 이지 $\overline{\mathrm{CG}}$ 나 $\overline{\mathrm{CE}}$ 가 아니다.
- $\sin(\angle \mathrm{BAC})$ 를 $\frac{3}{5}$ 로 쓰는 실수. 각 A 의 대변은 $\overline{\mathrm{BC}} = 4$ 이므로 $\frac{4}{5}$ 이다.

다른 풀이

3단계의 $\overline{\mathrm{EG}}$ 는 삼각형 AEG 에서 구할 수도 있다. 삼각형 ACG 에서

$$\cos(\angle \mathrm{CAG}) = \frac{5^2 + 2^2 - (2\sqrt{6})^2}{2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

이고 $\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{CAG}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AG}} = 2$ 이므로

$$\overline{\mathrm{EG}}^2 = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

숫자가 더 간단해서 계산 실수가 줄어든다. 이후는 같다.



구하는 선분이 원의 현이면 "반지름과 원주각"부터 찾는다. 나머지 계산은 그 두 가지를 얻기 위한 준비 과정이다.

15 수학II › 적분 › 정적분
4점 객관식 난이도 ●●●●○

정답 ④

핵심 아이디어

$h'(x)=g(x)-f(x)$ 이므로 h 의 극값은 **두 그래프 $y=g(x)$, $y=f(x)$ 의 위아래가 뒤바뀌는 곳**에서만 생긴다. $y=g(x)$ 는 두 점 $(-1,0)$, $(1,0)$ 에서 꺾이는 그래프이고 a 는 양쪽 반직선의 기울기다. 오른쪽에서는 a 와 상관없이 위아래가 꼭 한 번 바뀌므로, **왼쪽 반직선이 곡선 $y=-x^2$ 에 접하는 순간**을 기준으로 잡으면 된다.

풀이

1. 극값을 그래프의 위아래로 읽기

f, g 는 모두 연속함수이므로 h 는 미분가능하고

$$h'(x)=g(x)-f(x)$$

이다. h 가 $x=c$ 에서 극값을 갖는다는 것은 h' 의 부호가 $x=c$ 에서 바뀐다는 것, 곧 $x=c$ 의 좌우에서 두 그래프의 위아래가 뒤바뀐다는 것이다. 두 그래프가 만나더라도 **접하기만 하고 위아래가 그대로이면 극값이 아니다.**

2. 가운데와 오른쪽: 항상 한 번

- $-1\le x<1$ 에서 $g(x)=0$ 이고, $f(x)$ 는 $x<0$ 에서 $-x^2\le 0$, $0\le x<1$ 에서 $x(x-1)\le 0$ 이다. 따라서 $g(x)\ge f(x)$ 이고 위아래가 바뀌지 않는다.
- $x\ge 1$ 에서는 반직선 $y=a(x-1)$ 과 포물선 $y=x(x-1)$ 을 비교한다.

$$g(x)-f(x)=a(x-1)-x(x-1)=-(x-1)(x-a)$$

$a>1$ 이면 $1<x<a$ 에서 g 가 위, $x>a$ 에서 f 가 위이므로 $x=a$ 에서 한 번 바뀐다. $0<a\le 1$ 이면 $x>1$ 에서 줄곧 f 가 위이므로 $x=1$ 에서 한 번 바뀐다.

즉 $x\ge -1$ **에서는 a 의 값과 관계없이 위아래가 정확히 한 번 바뀐다.** 극값이 하나뿐이려면 $x<-1$ 에서는 한 번도 바뀌지 않아야 한다.

3. 왼쪽: 접할 때를 기준으로

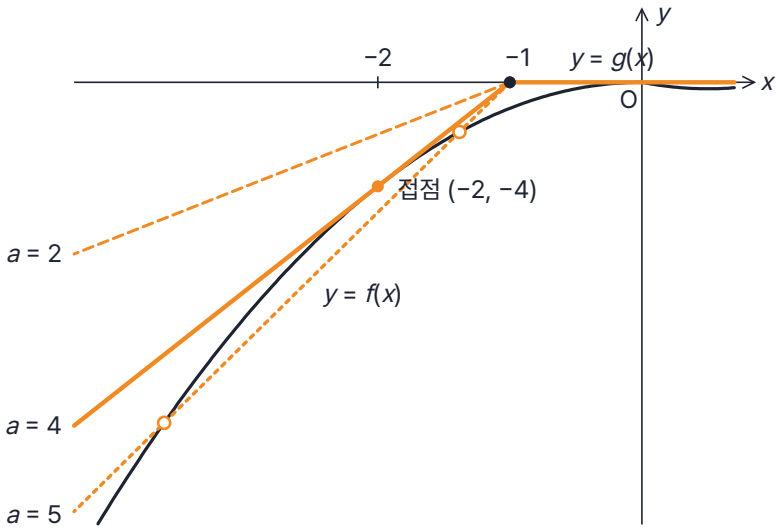
$x<-1$ 에서 $y=g(x)$ 는 점 $(-1,0)$ 에서 왼쪽 아래로 뻗는 기울기 a 의 반직선 $y=a(x+1)$ 이고, $y=f(x)$ 는 포물선 $y=-x^2$ 이다. a 를 0 에 가까운 값에서부터 키우면 반직선은 점 $(-1,0)$ 을 중심으로 돌면서 점점 아래로 내려온다. 처음에는 포물선 위쪽에 떠 있다가, 어느 순간 포물선에 **접하고**, 그 뒤로는 포물선을 두 번 가로지른다. 그러므로 접하는 순간이 기준이다.

접할 조건: $a(x+1)=-x^2$, 즉

$$x^2+ax+a=0$$

이 중근을 가져야 하므로 $a^2-4a=0$ 에서 $a=4$ $(a>0)$ 이고, 접점은 $x=-\dfrac{a}{2}=-2$, 곧 점 $(-2,-4)$ 이다. $-2<-1$ 이므로 접점은 실제로 반직선 위에 있다.

문제 저작권: 한국교육과정평가원 / 해설: 자체 제작



(그림: 세로 방향을 줄여 그렸다. $a=2$ 는 만나지 않고, $a=4$ 는 점 $(-2,-4)$ 에서 접하며, $a=5$ 는 두 점에서 만난다.)

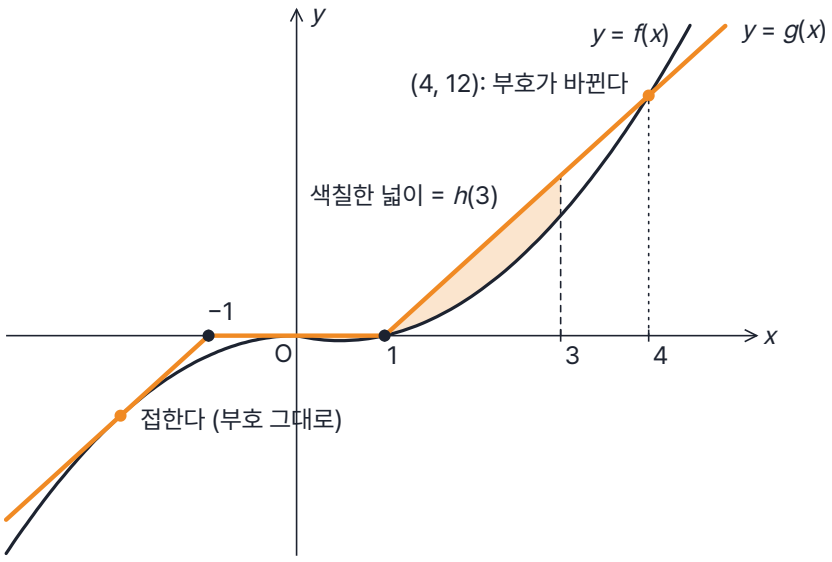
- $0<a<4$: 반직선이 포물선과 만나지 않고 줄곧 위에 있다. 바뀌는 곳 없음 → 극값 1 개.
- $a=4$: 접점에서 만나지만 좌우 모두 반직선이 위다. 바뀌는 곳 없음 → 극값 1 개.
- $a>4$: 두 점에서 가로지른다. x^2+ax+a 는 $x=-1$ 에서 값이 $1>0$ 이고 축 $x=-\dfrac{a}{2}$ 가 -2 보다 왼쪽이므로 두 교점이 모두 $x<-1$ 에 있다. 위아래가 두 번 더 바뀌어 극값 3 개.

따라서 조건에 맞는 범위는 $0<a\le 4$ 이고

$$k=4$$

4. $a=4$ 일 때 $h(3)$

$a=4$ 일 때 두 그래프는 아래와 같다. $0\le x\le 3$ 에서 $g(x)\ge f(x)$ 이므로 $h(3)$ 은 이 구간에서 두 그래프 사이의 넓이다.



$0\le t\le 1$ 에서 $g(t)=0$, $1\le t\le 3$ 에서 $g(t)=4t-4$ 이므로

$$h(3)=\int_0^1(-t^2+t)\,dt+\int_1^3(-t^2+5t-4)\,dt$$

$$\int_0^1 (-t^2+t)\,dt = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\int_1^3 (-t^2+5t-4)\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}+\frac{5t^2}{2}-4t\right]_1^3 = \frac{3}{2}-\left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{10}{3}$$

$$h(3) = \frac{1}{6}+\frac{10}{3} = \frac{7}{2}$$

5. 답

$$k+h(3) = 4+\frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

따라서 정답은 ④이다.

검토. $a=4$ 일 때 두 그래프는 $x=-2,\ 0,\ 1$ 에서 만나지만 위아래가 그대로이고, $x=4$ 에서만 g 가 위에서 아래로 바뀐다. h 는 $x=4$ 에서 극대 하나만 갖는다.

실수 포인트

- 두 그래프가 만나는 점의 개수를 극값의 개수로 세는 실수. $x=0$, $x=1$, 그리고 $a=4$ 일 때의 $x=-2$ 는 **만나지만 위아래가 바뀌지 않는 점**이다. 이를 극값으로 세면 조건에 맞는 a 가 없다고 잘못 결론짓게 된다.
- 접하는 경우 $a=4$ 를 빼고 $0<a<4$ 로 답하는 실수. 그러면 최댓값이 존재하지 않는다. 접할 때는 부호가 바뀌지 않으므로 $a=4$ 가 포함된다.
- 왼쪽 반직선의 식 $ax+a$ 는 $x<-1$ 에서만 쓰인다. 접점 $x=-2$ 와 $a>4$ 일 때의 두 교점이 정말 $x<-1$ 에 있는지 확인해야 한다.
- $h(3)$ 을 구할 때 $0\le t<1$ 에서 $g(t)=0$ 임을 잊고 $4t-4$ 를 그대로 적분하는 실수.

다른 풀이

그래프 대신 $p(x)=g(x)-f(x)$ 의 식으로 부호를 조사해도 된다.

구간	$x<-1$	$-1\le x<0$	$0\le x<1$	$x\ge 1$
$p(x)$	x^2+ax+a	x^2	$x(1-x)$	$-(x-1)(x-a)$

가운데 두 구간에서는 $p(x)\ge 0$ 이고, 마지막 구간에서는 a 의 값에 관계없이 양에서 음으로 한 번 바뀐다. 따라서 $x<-1$ 에서 $q(x)=x^2+ax+a$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다. $q(-1)=1>0$ 이고 판별식은 $D=a(a-4)$ 이므로, $0<a<4$ 이면 $q>0$, $a=4$ 이면 $q=(x+2)^2\ge 0$ 으로 부호 변화가 없고, $a>4$ 이면 두 근이 모두 -1 보다 작아 부호가 두 번 바뀐다. 따라서 $k=4$ 이고 이후 계산은 같다.

정적분으로 정의된 함수의 극값은 피적분함수 두 그래프의 위아래로 읽자. 개수가 달라지는 경계는 대개 접하는 순간이다.

16 수학I › 수열 › 수열의 귀납적 정의

3점 단답형 난이도 ●○○○○

정답 9

핵심 아이디어

귀납적으로 정의된 수열은 $n=1,2,\dots$ 를 차례로 대입해 앞에서부터 하나씩 구한다. 이때 n^2 의 n 은 "지금 대입하는 번호"라는 점만 주의한다.

풀이

주어진 관계식은 $a_1=1,\ a_{n+1}=n^2a_n+1$ 이다. 구하는 항이 a_3 이므로 두 번만 대입하면 된다.

1단계: $n=1$ **대입** (a_2 를 얻기 위해)

$$a_2=1^2\cdot a_1+1=1\cdot 1+1=2$$

2단계: $n=2$ **대입** (a_3 을 얻기 위해)

$$a_3=2^2\cdot a_2+1=4\cdot 2+1=9$$

따라서 $a_3=9$ 이다.

실수 포인트

- a_3 을 구할 때 계수를 3^2 으로 쓰는 실수. $a_{n+1}=a_3$ 이면 $n=2$ 이므로 계수는 2^2 이다.
- a_2 를 구할 때 n^2 을 빼먹고 a_1+1 로만 계산하는 실수(이 문항에서는 우연히 값이 같지만 습관이 되면 다음 항에서 틀린다).

점화식은 "왼쪽 항의 번호에서 n 을 거꾸로 읽어 내는 것"이 전부다.

17 수학II › 적분 › 부정적분

3점 단답형 난이도 ●○○○○

정답 16

핵심 아이디어

부정적분에는 적분상수 C 가 붙고, 주어진 함숫값 하나($F(0)=4$)가 그 C 를 정해 준다.

풀이

1단계: 부정적분 구하기

$F'(x)=f(x)=4x^3-2x$ 이므로

$$F(x)=\int(4x^3-2x)\,dx=x^4-x^2+C \quad (C\text{는 적분상수})$$

2단계: 적분상수 정하기

$F(0)=4$ 를 대입하면 $0-0+C=4$, 즉 $C=4$ 이다.

$$F(x)=x^4-x^2+4$$

3단계: 함숫값 계산

$$F(2)=16-4+4=16$$

실수 포인트

- 적분상수 C 를 빠뜨리고 $F(2)=12$ 로 답하는 실수.
- $\int 4x^3\,dx = x^4$ 에서 계수를 4 로 나누는 것을 잊어 $4x^4$ 으로 쓰는 실수.

다른 풀이

정적분으로 바로 계산할 수도 있다. $F(2)-F(0)=\displaystyle\int_0^2 (4x^3-2x)\,dx=\Big[x^4-x^2\Big]_0^2=12$ 이므로 $F(2)=4+12=16$.

"한 부정적분"이라는 말이 나오면 함숫값 조건으로 C 를 잡는 문제다.

18 수학Ⅰ › 삼각함수 › 사인법칙과 코사인법칙

3점 단답형 난이도

정답 12

핵심 아이디어

두 변과 그 끼인각을 알면 넓이는 $\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 이다. 코사인이 주어졌으므로 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 로 사인을 먼저 구한다.

풀이

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\cos A=-\dfrac{3}{5}$ (단, $A=\angle BAC$)이다.

1단계: $\sin A$ 구하기

넓이 공식에는 사인이 필요하다.

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = 1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

A 는 삼각형의 내각이므로 $0<A<\pi$ 이고, 이 범위에서 $\sin A>0$ 이다. 따라서

$$\sin A=\frac{4}{5}$$

($\cos A<0$ 이라는 것은 A 가 둔각이라는 뜻일 뿐, 사인의 부호에는 영향을 주지 않는다.)

2단계: 넓이 계산

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{4}{5}=12$$

실수 포인트

- $\cos A$ 가 음수라고 해서 $\sin A=-\dfrac{4}{5}$ 로 두거나 넓이를 음수로 계산하는 실수. 삼각형의 내각의 사인은 항상 양수다.
- 넓이 공식에 $\cos A$ 를 그대로 넣어 $\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{3}{5}=9$ 로 답하는 실수.

끼인각의 코사인이 보이면 "넓이는 사인"이라고 한 번 바꿔 읽자.

19 수학II › 미분 › 도함수의 활용
3점 단답형 난이도 ●●○○○

정답 15

핵심 아이디어

"구간의 모든 x 에 대하여 $-k \le h(x) \le k$" 는 "그 구간에서 $h(x)$ 의 최댓값 $\le k$ 이고 최솟값 $\ge -k$" 와 같다. 결국 닫힌구간에서 삼차함수의 최대·최소를 구하는 문제다.

풀이

$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 이라 하자. 구간 $-2 \le x \le 2$ 에서 $h(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면, 부등식이 항상 성립할 조건은

$$M \le k \quad \text{그리고} \quad -k \le m$$

이다.

1단계: 극값을 갖는 위치 찾기

닫힌구간에서의 최대·최소는 극값과 양 끝 값 중에 있으므로 먼저 도함수를 구한다.

$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$h'(x) = 0$ 인 x 는 $-2,\ 1$ 이다. 구간 $[-2, 2]$ 에서 부호를 보면

- $-2 < x < 1$ 에서 $h'(x) < 0$ (감소)
- $1 < x < 2$ 에서 $h'(x) > 0$ (증가)

2단계: 후보 값 계산

$$h(-2) = -16 + 12 + 24 - 8 = 12$$
$$h(1) = 2 + 3 - 12 - 8 = -15$$
$$h(2) = 16 + 12 - 24 - 8 = -4$$

$x = -2$ 에서 출발해 $x = 1$ 까지 내려갔다가 다시 올라가므로 최솟값은 $m = h(1) = -15$, 최댓값은 양 끝 값 중 큰 값인 $M = h(-2) = 12$ 이다.

3단계: k 의 범위

$$12 \le k, \qquad -k \le -15 \iff k \ge 15$$

두 조건을 모두 만족하려면 $k \ge 15$ 이다. 따라서 양수 k 의 최솟값은 15 이다.

실수 포인트

- 최댓값 12 만 보고 $k = 12$ 라고 답하는 실수. k 는 $|h(x)|$ 의 최댓값, 즉 12 와 $|-15| = 15$ 중 큰 값 이상이어야 한다.
- 양 끝 값 $h(2) = -4$ 를 확인하지 않고 넘어가는 습관. 이 문항에서는 결과에 영향이 없지만 끝점이 최대·최소가 되는 경우가 많다.
- $h(1)$ 계산에서 상수항 -8 을 빠뜨려 -7 로 계산하는 실수.

"$-k \le h(x) \le k$" 는 "$|h(x)|$ 의 최댓값이 k 이하"라고 한 줄로 번역해 두면 편하다.

20 수학I › 수열 › 수열의 합과 일반항의 관계
4점 단답형 난이도 ●●●○○

정답 130

핵심 아이디어

합 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 에 대한 식이 주어지면 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 으로 이웃한 두 항의 관계식을 만든다. 이렇게 얻은 "$2a_n+a_{n+1}=$ (n 에 대한 식)" 꼴을 그대로 쓸 수 있도록 구하는 합을 두 항씩 묶는 것이 이 문항의 흐름이다.

풀이

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ 라 하면 조건은 $a_1=7$ 이고, $n\ge 2$ 일 때

$$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10 \qquad \cdots(*)$$

이다.

1단계: (가) 구하기 — $S_{n+1}-S_n$ 계산

$n\ge 2$ 이면 $n+1\ge 2$ 이기도 하므로 $(*)$ 를 n 과 $n+1$ 에 모두 쓸 수 있다. 두 식을 빼면

$$\begin{aligned}a_{n+1}=S_{n+1}-S_n&=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{1}{6}\{(n+1)^2-n^2\}-\frac{1}{6}\{(n+1)-n\}\\&=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{2n+1}{6}-\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\frac{n}{3}\end{aligned}$$

따라서 (가)는 $f(n)=\dfrac{n}{3}$ 이다.

확인: 양변에 3 을 곱하면 $3a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+n$, 즉

$$2a_n+a_{n+1}=n=3\times\frac{n}{3}\quad(n\ge 2) \qquad \cdots\ ㉠$$

으로 풀이 과정의 식과 형태가 맞는다.

2단계: (나) 구하기 — $n=2$ 대입

$(*)$ 에 $n=2$ 를 넣으면 좌변은 $a_1+a_2=7+a_2$ 이다.

$$7+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{4}{6}-\frac{2}{6}+10=\frac{2}{3}a_2+\frac{31}{3}$$

$$\frac{1}{3}a_2=\frac{10}{3}\quad\Longrightarrow\quad a_2=10$$

따라서 $p=10$ 이다.

3단계: (다) 구하기 — 두 항씩 묶기

구하는 합을 풀어 쓰면

$$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}=a_1+a_2+(a_3+a_4+\cdots+a_{12})+(a_3+a_5+\cdots+a_{11})$$

a_3 부터 a_{12} 까지를 $(a_3,a_4),(a_5,a_6),\ldots,(a_{11},a_{12})$ 로 묶고, 홀수 번째 항이 한 번씩 더 더해지므로

$$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$$

㉠에 $n=2k+1$ (≥ 3) 을 대입하면 $2a_{2k+1}+a_{2k+2}=2k+1$ 이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{5}(2k+1) = 3+5+7+9+11 = 35$$

$$q = a_1 + a_2 + 35 = 7 + 10 + 35 = 52$$

4단계: 답

$f(12) = \dfrac{12}{3} = 4$ 이므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130$$

검토: ㉠과 $a_2 = 10$ 으로 실제 항을 구하면 $a_3 = 2 - 20 = -18$, $a_4 = 3 + 36 = 39$ 이고, $(*)$ 에 $n = 3$ 을 넣으면 좌변 $7 + 10 - 18 = -1$, 우변 $-12 + \frac{9}{6} - \frac{3}{6} + 10 = -1$ 로 일치한다.

실수 포인트

- $\dfrac{1}{6}\{(n+1)^2 - n^2\} - \dfrac{1}{6}$ 을 정리할 때 뒤의 $-\dfrac{1}{6}$ 을 빠뜨려 (가)를 $\dfrac{2n+1}{6}$ 로 쓰는 실수.
- a_2 를 ㉠에 $n = 1$ 을 넣어 $2a_1 + a_2 = 1$ 로 구하는 실수. ㉠은 $n \geq 2$ 에서만 성립하고, $(*)$ 자체가 $n = 1$ 에서는 성립하지 않는다(실제로 $n = 1$ 을 넣으면 $7 \neq \frac{14}{3} + 10$).
- (다)에서 ㉠에 대입하는 번호가 $n = 2k + 1$ 임을 놓치고 $\sum(2k+2)$ 나 $\sum k$ 로 계산하는 실수.

빈칸 문제는 앞뒤 줄의 형태가 답의 검산 도구다. "3×(가)"가 깔끔한 식이 되는지 꼭 확인하자.

21 수학II › 함수의 극한과 연속 › 함수의 연속

4점 단답형 난이도 ●●●●○

정답 65

핵심 아이디어

분모가 0 이 되는 $x = 0,\ 2$ 에서도 우극한이 존재하려면 분자도 0 으로 가야 하므로 $f(x)$ 는 $x(x-2)$ 를 인수로 갖는다. 남은 한 근을 0 이나 2 와 겹쳐 놓은 **특수한 꼴(중근)** 을 먼저 그려 보면 조건 (나)의 집합이 원소 2 개가 될 수 없다. 그래서 남은 근을 미지수 c 로 두고 **식을 세워** 풀어야 한다.

풀이

1. 연속 조건과 조건 (가)에서 f 의 꼴

$g(x)$ 는 $x < t$ 에서 $-f(x)$, $x \geq t$ 에서 $f(x)$ 이다. $x = t$ 에서 연속이려면 $-f(t) = f(t)$, 즉

$$f(t) = 0$$

이다. 또 $a = 0$ 일 때 $x \to 0+$ 이면 분모 $x(x-2) \to 0$ 인데도 극한값이 존재하므로 분자도 0 으로 가야 한다. g 가 연속이므로 $g(0) = 0$, 곧 $f(0) = 0$ 이다. 같은 이유로 $f(2) = 0$ 이다.

따라서 최고차항의 계수를 k $(k > 0)$, 나머지 한 근을 c 라 하면

$$f(x) = kx(x-2)(x-c), \qquad t \in \{0,\ 2,\ c\}$$

이다. 이때 $x \neq 0, 2$ 에서 약분이 되어

$$\frac{g(x)}{x(x-2)} = \begin{cases} -k(x-c) & (x < t) \\ k(x-c) & (x \geq t) \end{cases}$$

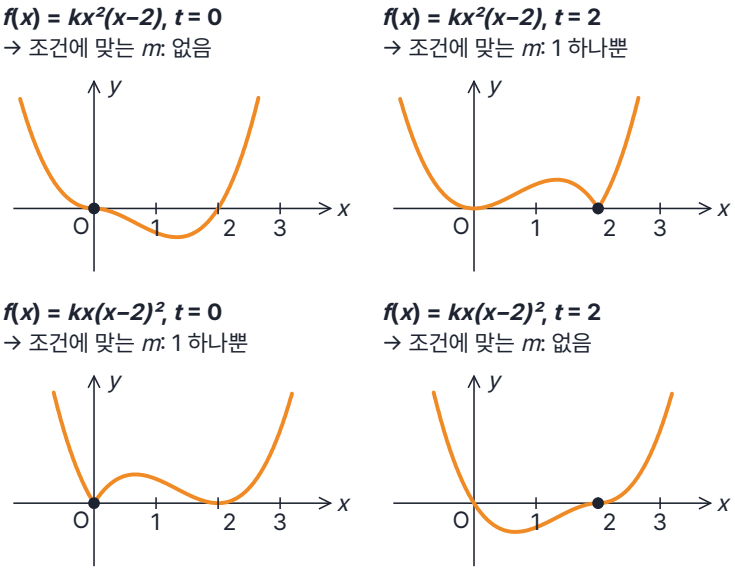
이므로 (가)는 모든 a 에서 성립한다. 우극한은 m 의 **오른쪽** 식을 쓰므로 $L(m) = \lim_{x \to m+} \dfrac{g(x)}{x(x-2)}$ 라 하면

$$L(m) = \begin{cases} -k(m-c) & (m < t) \\ k(m-c) & (m \geq t) \end{cases}$$

조건 (나)는 $L(m) < 0$ 인 자연수 m 의 집합이 $\left\{ g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1) \right\}$ 이라는 것이고, 단서에서 두 원소가 서로 다르므로 **그런 자연수가 정확히 2 개**이고 $g(-1),\ -\dfrac{7}{2}g(1)$ 이 바로 그 두 수다.

2. 특수한 경우부터: 중근으로 그려 보기

세 근 $0,\ 2,\ c$ 중 둘이 겹치는 꼴, 즉 $c = 0$ 또는 $c = 2$ 인 그래프가 가장 먼저 떠오른다. 이때 t 는 0 또는 2 이므로 경우는 넷이다.



(그림: $k = 1$ 로 그린 $y = g(x)$. 검은 점이 $x = t$ 이다.)

그래프에서 $L(m)$ 의 부호를 읽으려면 분모 $x(x-2)$ 의 부호와 견주면 된다. $m \geq 3$ 이면 m 의 오른쪽에서 분모가 양수이므로 g 가 음수여야 하는데, 네 그래프 모두 $x > 2$ 에서 $g(x) > 0$ 이다. 그러므로 $m \geq 3$ 은 들어올 수 없고, 후보는 $m = 1,\ 2$ 뿐이다. 식으로 확인하면 다음과 같다.

$f(x)$	t	$L(m)$ (m 은 자연수)	$L(m) < 0$ 인 m
$kx^2(x-2)$	0	km	없음
$kx^2(x-2)$	2	$m = 1$ 일 때 $-k$, $m \geq 2$ 일 때 km	1
$kx(x-2)^2$	0	$k(m-2)$	1
$kx(x-2)^2$	2	$k\lvert m-2 \rvert$	없음

어느 경우에도 원소가 많아야 1 개여서 (나)를 만족시킬 수 없다. 원소가 2 개가 되려면 $x > 2$ 인 곳에 g 가 음수인 구간이 있어야 하고, 그러려면 세 번째 근 c 가 2 보다 오른쪽에 따로 있어야 한다. **그 위치는 그림만으로 정할 수 없으므로 c 와 k 를 미지수로 두고 식을 세운다.**

3. 일반적인 식으로: t 에 따른 경우 나누기

$k>0$ 이므로

$$L(m)<0 \iff (m\ge t \text{ 이고 } m<c) \text{ 또는 } (m<t \text{ 이고 } m>c)$$

(i) $t=c$ 인 경우. $m\ge c$ 이면서 $m<c$ 이거나 $m<c$ 이면서 $m>c$ 인 m 은 없다. 집합이 공집합이므로 불가능하다. (2의 첫째, 넷째 그림이 여기에 속한다.)

(ii) $t=0, c\neq 0$ 인 경우. 자연수 m 은 모두 $m\ge t$ 이므로 조건은 $m<c$ 이다. 이런 자연수가 정확히 2 개이려면 $\{1,2\}$, 즉 $2<c\le 3$ 이다. 그런데 $1\ge t$ 이므로

$$g(1)=f(1)=k\cdot 1\cdot(-1)\cdot(1-c)=k(c-1)>0$$

이고 $-\dfrac{7}{2}g(1)<0$ 이 되어 자연수일 수 없다. 불가능하다.

(iii) $t=2, c\neq 2$ 인 경우.

- $m\ge 2$ 이고 $m<c$ 인 자연수: $c>2$ 일 때 $2,\ 3,\ \cdots$ 중 c 미만인 것
- $m<2$ 이고 $m>c$ 인 자연수: $c<1$ 일 때 $m=1$ 하나뿐

$c<1$ 이면 원소가 1 하나, $1\le c<2$ 이면 원소가 없으므로 $c>2$ 여야 하고, 원소가 정확히 2 개이려면

$$\{2,\ 3\},\qquad 3<c\le 4$$

이다. 이제 $-1<t, 1<t$ 이므로 두 값 모두 $-f$ 로 계산한다.

$$g(-1)=-f(-1)=3k(c+1),\qquad -\frac{7}{2}g(1)=\frac{7}{2}f(1)=\frac{7}{2}k(c-1)$$

두 값이 2 와 3 을 하나씩 가져야 한다.

- $3k(c+1)=2,\ \dfrac{7}{2}k(c-1)=3$ 이면 $k(c+1)=\dfrac{2}{3}$, $k(c-1)=\dfrac{6}{7}$ 인데, $c+1>c-1>0$ 이므로 $k(c+1)>k(c-1)$ 이어야 해서 모순이다.
- $3k(c+1)=3,\ \dfrac{7}{2}k(c-1)=2$ 이면 $k(c+1)=1$, $k(c-1)=\dfrac{4}{7}$ 이다. 변끼리 나누면

$$\frac{c+1}{c-1}=\frac{7}{4}\implies 4c+4=7c-7\implies c=\frac{11}{3}$$

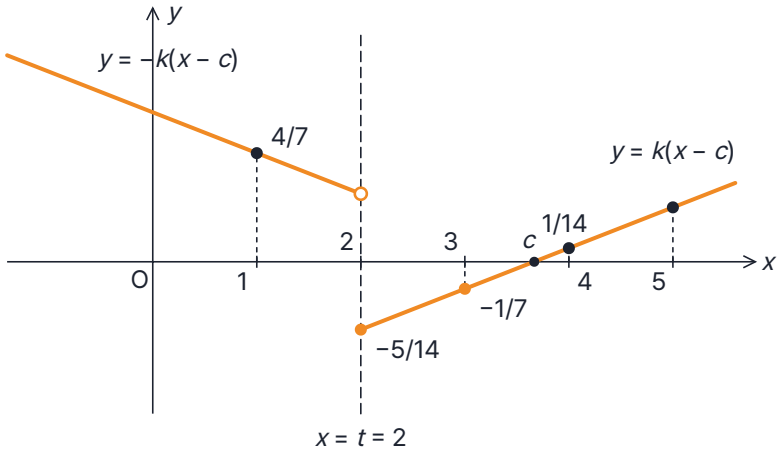
$3<\dfrac{11}{3}\le 4$ 를 만족시키고 $k=\dfrac{1}{c+1}=\dfrac{3}{14}>0$ 이다.

따라서 $t=2$, $f(x)=\dfrac{3}{14}x(x-2)\left(x-\dfrac{11}{3}\right)$ 로 하나로 정해진다.

4. 구한 함수 확인

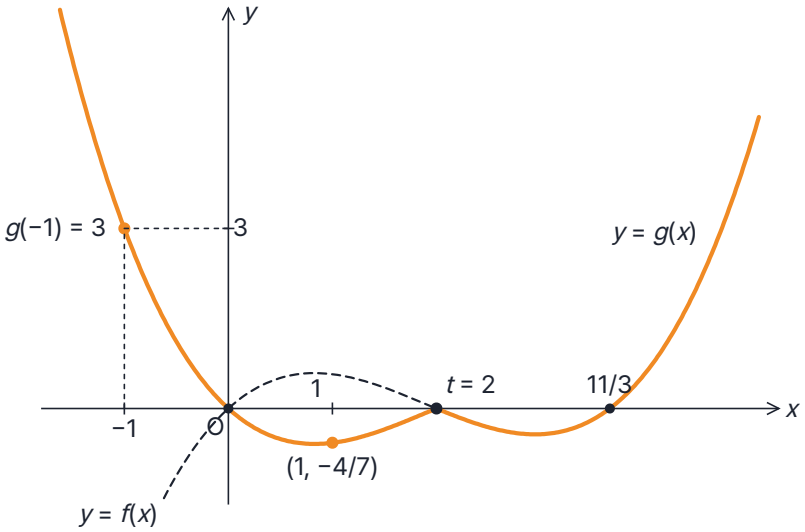
$y=\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$ 는 $x=2$ 에서 식이 바뀌는 두 반직선이다. 자연수 중 $m=2,\ 3$ 에서만 우극한이 음수다.

문제 저작권: 한국교육과정평가원 / 해설: 자체 제작



(그림: $x=2$ 에서의 우극한은 오른쪽 반직선의 값 $-\frac{5}{14}$ 이다. $L(1)=\frac{4}{7}>0$, $L(4)=\frac{1}{14}>0$.)

실제 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다. $x<2$ 에서 $y=f(x)$ (파선)를 x 축에 대하여 뒤집은 모양이고, $g(-1)=3$, $-\frac{7}{2}g(1)=-\frac{7}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=2$ 로 집합 $\{3,\ 2\}$ 와 맞는다.



5. 답

$-5<t=2$ 이므로

$$g(-5)=-f(-5)=-\frac{3}{14}\cdot(-5)\cdot(-7)\cdot\left(-\frac{26}{3}\right)=\frac{3}{14}\cdot 35\cdot\frac{26}{3}=65$$

실수 포인트

- 중근인 그림에 끼워 맞추려다 시간을 쓰는 실수. 중근 꼴은 네 경우 모두 원소가 많아야 1 개다. 특수한 경우가 안 되는 것을 확인했으면 바로 $f(x)=kx(x-2)(x-c)$ 로 식을 세운다.
- $x\to m+$ 인데 $m=t$ 일 때 왼쪽 식 $-f$ 를 쓰는 실수. 우극한은 항상 오른쪽 구간의 식으로 계산하므로 $m=2=t$ 는 $k(m-c)$ 쪽에 들어간다.
- $g(-1)$, $g(1)$ 을 계산할 때 -1, 1 이 t 보다 작은지 큰지 확인하지 않고 $f(-1)$, $f(1)$ 을 그대로 쓰는 실수. $t=2$ 이면 둘 다 $-f$ 이다.

- 집합 조건을 "두 값이 자연수"로만 읽고, $L(m) < 0$ 인 자연수가 **정확히 그 두 개뿐**이라는 정보($3 < c \le 4$)를 쓰지 않는 실수.

그림으로 특수한 경우를 먼저 던져 보고, 안 되면 미련 없이 미지수를 두고 식을 세우자. 안 되는 이유가 식을 어떻게 세울지 알려 준다.

22 수학I › 지수함수와 로그함수 › 지수함수와 로그함수의 활용

4점 단답형 난이도 ●●●●○

정답 457

핵심 아이디어

두 가지 이동을 이어서 쓴다. 로그함수의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 **대칭**이동하면 역함수(지수함수)의 그래프가 되고, 그 그래프를 원점을 중심으로 2 **배 확대**하면 두 번째 곡선이 된다. 원점을 지나는 직선은 확대해도 그대로이므로, 직선 OB 위에 놓인 대칭점을 2 배 한 점이 바로 B 이다.

풀이

1. 대칭: $y = x$ 에 대하여 뒤집기

$\mathrm{A}(a, b)$ 는 $y = \log_{16}(8x + 2)$ 위의 점이므로

$$b = \log_{16}(8a + 2) \iff 16^b = 8a + 2 \iff a = \frac{16^b}{8} - \frac{1}{4} \qquad \cdots ①$$

A 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(b, a)$ 라 하면, ①은 A' 이 역함수의 그래프

$$y = \frac{16^x}{8} - \frac{1}{4}$$

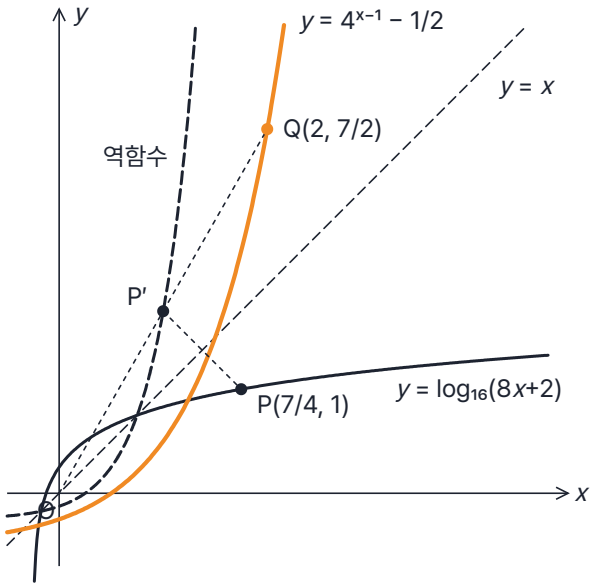
위에 있다는 뜻이다.

2. 확대: 원점을 중심으로 2 배

곡선 $y = \varphi(x)$ 위의 점 (x, y) 를 원점을 중심으로 2 배 한 점 $(2x, 2y)$ 는 곡선 $\dfrac{y}{2} = \varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)$, 즉 $y = 2\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 위에 있다. $\varphi(x) = \dfrac{16^x}{8} - \dfrac{1}{4}$ 에 적용하면 $16^{x/2} = 4^x$ 이므로

$$2\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{4^x}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4^x}{4} - \frac{1}{2} = 4^{x-1} - \frac{1}{2}$$

이것은 점 B 가 놓인 곡선의 식과 같다. 즉 **두 번째 곡선은 첫 번째 곡선을 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 원점을 중심으로 2 배 확대한 곡선**이다. 밑이 $16 = 4^2$ 으로 제곱 관계인 것이 이 확대를 알려 주는 신호다.



(그림: 로그 곡선 위의 점 $\mathrm{P}\left(\frac{7}{4}, 1\right)$ 을 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 역함수의 그래프(파선) 위의 $\mathrm{P}'\left(1, \frac{7}{4}\right)$ 이 되고, P' 을 원점에서 2 배 늘이면 두 번째 곡선(색 실선) 위의 $\mathrm{Q}\left(2, \frac{7}{2}\right)$ 가 된다.)

3. B 의 좌표

$h(x)=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 이라 하자. 2에 의해 $\mathrm{A}'(b,a)$ 를 2 배 한 점 $(2b, 2a)$ 는 곡선 $y=h(x)$ 위에 있다(①에서 직접 $2a=\frac{4^{2b}}{4}-\frac{1}{2}=h(2b)$ 로도 확인된다). 그리고 이 점은 직선 OA' 위에 있다.

한편 A' 이 직선 OB 위에 있으므로 $\mathrm{O},\ \mathrm{A}',\ \mathrm{B},\ (2b, 2a)$ 는 모두 한 직선 ℓ 위에 있다. B 가 제1사분면의 점이므로 ℓ 은 $y=nx\ (n>0)$ 꼴이다.

$x>0$ 에서 ℓ 과 곡선 $y=h(x)$ 의 교점은 하나뿐이다. $h(0)=-\frac{1}{4}<0$ 이어서 $x=0$ 에서는 곡선이 직선보다 아래에 있고, 아래로 볼록한 곡선은 한 번 직선 위로 올라가면 다시 내려오지 않기 때문이다.

따라서 $a>0,\ b>0$ 이면 $(2b, 2a)$ 가 곧 B 이다.

$$\mathrm{B}(2b,\ 2a)$$

($a>0$ 이면 $b=\log_{16}(8a+2)>\log_{16}2>0$ 이다. $a\le 0$ 인 경우는 아래 6에서 배제한다.)

4. 중점 조건

선분 AB 의 중점이 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$ 이므로

$$a+2b=\frac{77}{4}, \qquad 2a+b=\frac{133}{4}$$

두 식을 더하면 $3(a+b)=\frac{210}{4}$, 즉 $a+b=\frac{35}{2}$ 이다. 각 식에서 이것을 빼면

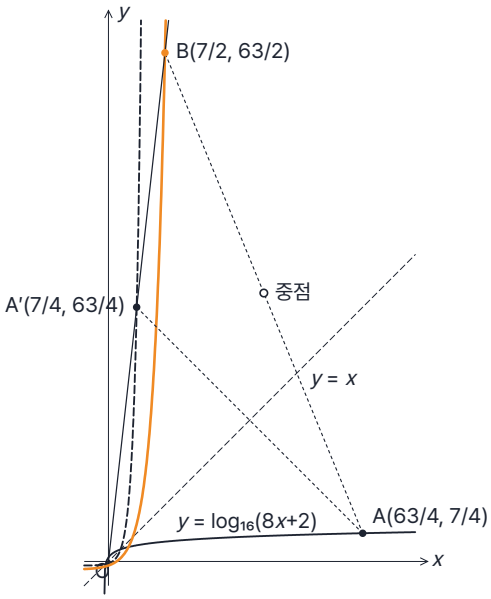
$$b=\frac{77}{4}-\frac{35}{2}=\frac{7}{4}, \qquad a=\frac{133}{4}-\frac{35}{2}=\frac{63}{4}$$

5. 검산과 답

중점 조건만으로 a, b 가 정해졌으므로, 이 값이 곡선 조건 ①을 만족시키는지 확인한다.

$$8a+2=126+2=128=2^7=16^{7/4} \quad\Longrightarrow\quad \log_{16}(8a+2)=\frac{7}{4}=b \ \text{(성립)}$$

$\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{63}{2}\right)$ 도 $h\left(\frac{7}{2}\right)=4^{5/2}-\frac{1}{2}=\frac{63}{2}$ 로 곡선 위에 있고 제1사분면의 점이다.



(그림: 실제 위치. A' 은 A 의 대칭점이고 B 는 A' 을 원점에서 2 배 늘인 점이다. 굵은 파선은 역함수의 그래프, 색 실선은 B 가 놓인 곡선, 원점을 지나는 가는 실선은 직선 OB 이다.)

$$a\times b=\frac{63}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{441}{16}$$

$441=3^2\cdot 7^2$ 과 $16=2^4$ 은 서로소이므로 $p=16,\ q=441$ 이고

$$p+q=457$$

6. $a\le 0$ 인 경우의 배제

진수 조건에서 $a>-\frac{1}{4}$ 이다. 만약 $-\frac{1}{4}<a\le 0$ 이면 B 의 x 좌표는 $\frac{77}{4}-a\ge\frac{77}{4}$ 이므로 B 의 y 좌표는 $h\left(\frac{77}{4}\right)$ 이상인 매우 큰 수이고, 직선 OB 의 기울기는 1 보다 훨씬 크다. 한편 $b=\frac{133}{4}-(\mathrm{B}\text{의 }y\text{좌표})$ 는 절댓값이 매우 큰 음수이고 $|a|<\frac{1}{4}$ 이므로 직선 OA' 의 기울기 $\frac{a}{b}$ 는 1 보다 작다. 두 기울기가 같을 수 없으므로 이 경우는 없다.

실수 포인트

- A 의 대칭점을 (a,b) 그대로 두거나 $(-b,-a)$ 로 쓰는 실수. $y=x$ 대칭은 좌표를 서로 바꾼 (b,a) 이다.
- 역함수를 구해 놓고 두 번째 곡선과 "같다"고 착각하는 실수. $\frac{16^x}{8}-\frac{1}{4}$ 과 $4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 은 다른 곡선이고, 원점 중심 2 배 확대의 관계다.
- 확대한 곡선의 식을 $y=2\varphi(2x)$ 로 쓰는 실수. x 방향으로 2 배 늘이면 x 자리에 $\frac{x}{2}$ 가 들어간다.
- 중점 공식에서 $\frac{77}{8}$ 을 $a+2b$ 와 바로 같다고 놓는 실수(2 로 나누는 것을 잊음). $a+2b=\frac{77}{4}$ 이다.

다른 풀이

확대 관계를 눈치채지 못했다면 $\mathrm{B}(s,\ h(s))$ 로 두고 식으로 밀어도 된다. $\mathrm{A}'(b,a)$ 가 직선 OB 위에 있으므로 $a\cdot s=b\cdot h(s)$, 중점 조건에서 $s=\frac{77}{4}-a$, $h(s)=\frac{133}{4}-b$ 이다. 여기에 ①을 연립하면 되는데, 지수가 섞여 직접 풀기는 어렵다.

이때 "$s=2b$ 이면 $h(s)=\dfrac{4^{2b}}{4}-\dfrac{1}{2}=2a$" 임을 ①에서 확인하면 $s=2b,\ h(s)=2a$ 가 세 식을 한꺼번에 만족시키는 꼴임을 알 수 있고, 이후 계산은 본 풀이와 같다.

밑이 16 과 4 처럼 제곱 관계로 주어지면, 대칭이동한 곡선과 "몇 배 확대" 관계가 숨어 있지 않은지 먼저 의심해 보자.

선택과목 · 미적분 23번 ~ 30번 · 8문항

23 미적분 › 미분법 › 삼각함수의 극한

2점 객관식 난이도 ●○○○○ 정답 ③

핵심 아이디어

$\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = 1$ 을 쓰려면 분모를 tan 안의 각과 똑같이 맞춰 주면 된다.

풀이

tan 안의 각이 $6x$ 이므로, 분모에도 $6x$ 가 보이도록 식을 고친다.

$$\frac{\tan 6x}{2x} = \frac{\tan 6x}{6x} \times \frac{6x}{2x} = \frac{\tan 6x}{6x} \times 3$$

$x \to 0$ 이면 $6x \to 0$ 이므로 $\dfrac{\tan 6x}{6x} \to 1$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{2x} = 1 \times 3 = 3$$

정답은 ③이다.

실수 포인트

- 각을 맞추면서 곱해 준 수를 거꾸로 계산하는 실수($\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$). "각의 계수 ÷ 분모의 계수"인 $\frac{6}{2}$ 가 남는다는 것을 식으로 직접 써서 확인하자.

극한 기본 공식은 "안의 각과 분모를 똑같이"만 기억하면 충분하다.

24 미적분 › 적분법 › 치환적분법

3점 객관식 난이도 ●●○○○ 정답 ④

핵심 아이디어

근호 안을 인수분해하면 $\cos^2 x$ 가 튀어나와 근호 밖으로 나올 수 있고, 남는 모양이 $\sqrt{\sin x}\cos x$ 라서 $\sin x = u$ 치환이 딱 맞는다.

풀이

1단계: 근호 안 정리. 공통인수 $\sin x$ 로 묶으면

$$\sin x - \sin^3 x = \sin x\,(1 - \sin^2 x) = \sin x \cos^2 x$$

적분 구간 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 에서는 $\cos x \ge 0$ 이므로 $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ 로 절댓값 없이 꺼낼 수 있다.

$$\sqrt{\sin x - \sin^3 x} = \sqrt{\sin x}\,\cos x$$

2단계: 치환. $\cos x$ 는 $\sin x$ 의 도함수이므로 $\sin x = u$ 로 놓는다. $\cos x\,dx = du$ 이고, $x = 0$ 일 때 $u = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $u = 1$ 이다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx = \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

정답은 ④이다.

실수 포인트

- $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ 이다. 이 문제는 구간에서 $\cos x \geq 0$ 이라 그대로 나오지만, 부호 확인을 건너뛰는 습관은 구간이 바뀌면 바로 오답이 된다.
- 치환 후 적분 구간을 u 의 값(0 에서 1)으로 바꾸지 않고 0, $\frac{\pi}{2}$ 를 그대로 대입하는 실수.

근호 안이 복잡해 보이면 먼저 인수분해부터 해 보자. 제곱 꼴이 숨어 있는 경우가 많다.

25 미적분 › 수열의 극한 › 수열의 극한의 대소 관계

3점 객관식 난이도 ●●○○○

정답 ③

핵심 아이디어

a_n 자체의 식은 알 수 없지만, 부등식의 각 변을 n 으로 나누면 샌드위치 정리로 $\frac{a_n}{n}$ 의 극한을 알 수 있다. 구하는 식도 $\frac{a_n}{n}$ 으로 표현하면 끝난다.

풀이

1단계: $\frac{a_n}{n}$ 의 극한. 주어진 부등식 $\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1$ 의 각 변을 양수 n 으로 나눈다(양수로 나누므로 부등호 방향은 그대로).

$$\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2 < \frac{a_n}{n} < 5+\frac{1}{n}$$

$n \to \infty$ 일 때 왼쪽은 $\sqrt{9}+2=5$, 오른쪽도 5 로 수렴한다. 양쪽이 같은 값으로 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$$

2단계: 구하는 식을 $\frac{a_n}{n}$ 으로 표현. 분자·분모가 모두 n^2 크기이므로 n^2 으로 나눈다.

$$\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}$$

$\frac{a_n}{n}\to 5$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{2}{n^2}\to 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\frac{5^2}{5+5}=\frac{5}{2}$$

정답은 ③이다.

실수 포인트

- $\sqrt{9n^2-5}$ 를 n 으로 나눌 때 근호 안은 n^2 으로 나누어야 한다($\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}$).
- "$a_n = 5n$" 이라고 단정하고 대입하는 것은 결과는 같아도 논리가 아니다. 알 수 있는 것은 $\frac{a_n}{n}\to 5$ 뿐이므로, 구하는 식을 $\frac{a_n}{n}$ 꼴로 바꾸는 과정을 써야 한다.

부등식으로 주어진 수열은 "무엇으로 나누면 양 끝이 같은 값으로 가는가"를 먼저 찾자.

26 미적분 › 적분법 › 정적분의 활용(입체도형의 부피)

3점 객관식 난이도 ●●○○○

정답 ①

핵심 아이디어

부피는 "단면의 넓이를 적분"한 것이다. x 에서의 단면은 한 변의 길이가 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 인 정삼각형이므로, 넓이에서 근호가 사라진다.

풀이

1단계: 단면의 넓이. x 축 위의 점 x $(1\le x\le 2)$ 에서 x 축에 수직으로 자르면, 밑면 위에 놓인 변의 길이는 곡선의 높이 $\sqrt{x+x\ln x}$ 이다. 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이므로

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{x+x\ln x}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+x\ln x)$$

2단계: 적분.

$$V=\int_1^2 S(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\int_1^2 x\,dx+\int_1^2 x\ln x\,dx\right)$$

첫째 적분은 $\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^2=\dfrac{3}{2}$.

둘째 적분은 다항함수와 로그함수의 곱이므로 부분적분을 쓴다. 미분하면 간단해지는 $\ln x$ 를 미분할 쪽으로, x 를 적분할 쪽으로 잡는다.

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=2\ln 2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

3단계: 합치기.

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3+8\ln 2}{4}=\frac{\sqrt{3}\,(3+8\ln 2)}{16}$$

정답은 ①이다.

실수 포인트

- 정삼각형 넓이 공식의 계수 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 를 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$(높이 공식)와 혼동하는 실수.
- 부분적분에서 뒤쪽 적분 $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{3}{4}$ 은 **빼는** 항이다. 부호를 놓쳐 더하면 $\dfrac{\sqrt{3}\,(9+8\ln 2)}{16}$ 처럼 보기에 없는 값이 나오니, 그럴 때는 이 부호부터 확인하자.

단면이 정해진 도형이면 "한 변의 길이 → 넓이 → 적분" 세 단계만 차례로 밟으면 된다.

27 미적분 › 미분법 › 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

3점 객관식 난이도 ●●●○○ 정답 ②

핵심 아이디어

곡선의 x, y 를 직선의 식에 그대로 대입하면 $\sin^2+\cos^2=1$ 덕분에 삼각함수가 모두 사라져 t 가 바로 구해진다. 그다음은 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ 계산이다.

풀이

1단계: 점 P 에 해당하는 t 찾기. 교점에서는 $y=3x-5e$, 즉 $y-3x=-5e$ 가 성립한다. 곡선의 식을 대입하면

$$\begin{aligned} y-3x &= e^{4t}\left\{(1-3\cos^2\pi t)-3(1+\sin^2\pi t)\right\} \\ &= e^{4t}\left\{-2-3(\cos^2\pi t+\sin^2\pi t)\right\}=-5e^{4t} \end{aligned}$$

따라서 $-5e^{4t}=-5e$ 에서 $4t=1$, 즉 $t=\dfrac{1}{4}$ 이다(교점은 하나뿐).

2단계: t 에 대해 미분. 곱의 미분법을 쓴다. 이때 $(\sin^2\pi t)'=2\sin\pi t\cos\pi t\cdot\pi=\pi\sin 2\pi t$, $(\cos^2\pi t)'=-\pi\sin 2\pi t$ 이다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4e^{4t}(1+\sin^2\pi t)+e^{4t}\cdot\pi\sin 2\pi t \\ \frac{dy}{dt} &= 4e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)+e^{4t}\cdot 3\pi\sin 2\pi t \end{aligned}$$

3단계: $t=\dfrac{1}{4}$ 대입. $\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\cos^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $e^{4t}=e$ 이므로

$$\frac{dx}{dt}=e\left(4\cdot\frac{3}{2}+\pi\right)=e(\pi+6),\qquad \frac{dy}{dt}=e\left(4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\pi\right)=e(3\pi-2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e(3\pi-2)}{e(\pi+6)}=\frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

정답은 ②이다.

실수 포인트

- $\sin^2\pi t$ 를 미분할 때 속미분 π 를 빠뜨리는 실수. 보기의 분자·분모에 π 가 들어 있는 이유가 바로 이 속미분이다.
- y 쪽의 $-3\cos^2\pi t$ 를 미분하면 부호가 두 번 바뀌어 $+3\pi\sin 2\pi t$ 가 된다. 부호를 한 번만 바꾸면 $-3\pi-2$ 가 나온다.
- 접선의 기울기를 직선 $y=3x-5e$ 의 기울기 3 과 혼동하지 말 것. 직선은 곡선과 "만날" 뿐 접선이 아니다.

대입했을 때 식이 깔끔하게 정리되도록 설계된 문제다. 겁먹지 말고 일단 대입해 보자.

28 미적분 › 적분법 › 치환적분법과 부분적분법(역함수의 정적분)

4점 객관식 난이도 ●●●●○ 정답 ⑤

핵심 아이디어

조건을 식으로 옮기면 $t=\dfrac{s^3}{1+s}$ 이 되고, g 는 이 관계를 거꾸로 푼 함수(t 를 넣으면 s 가 나오는 역함수)이다. $g(t)$ 의 식은 구할 수 없으므로, t 에 대한 적분을 s 에 대한 적분으로 바꿔서 계산한다.

풀이

1단계(조건 해석): 거리 t 를 s 로 나타내기.

먼저 $f'(x)$ 를 구해 둔다.

$$f'(x) = x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

- 점 $(s, f(s))$ 에서 y 축에 내린 수선의 발은 $(0,\ f(s))$ 이다.
- 접선 $y = f'(s)(x-s) + f(s)$ 가 y 축과 만나는 점은 $x=0$ 을 넣어 $(0,\ f(s) - sf'(s))$ 이다.

두 점은 모두 y 축 위에 있으므로 거리는 y 좌표의 차이다.

$$t = |f(s) - \{f(s) - sf'(s)\}| = |sf'(s)| = \frac{s^3}{1+s} \quad (s>0)$$

$f(s)$ 가 서로 지워지기 때문에 $\ln$ 이 사라진다는 점이 이 문제의 첫 번째 고비다.

2단계: g 가 잘 정의되는지 확인. $h(s) = \dfrac{s^3}{1+s}$ 라 하면 $s>0$ 에서

$$h'(s) = \frac{3s^2(1+s) - s^3}{(1+s)^2} = \frac{s^2(2s+3)}{(1+s)^2} > 0$$

이므로 h 는 증가하고, $s \to 0+$ 일 때 $h \to 0$, $s \to \infty$ 일 때 $h \to \infty$ 이다. 따라서 양수 t 마다 $h(s) = t$ 인 s 가 하나씩만 있고, 그 값이 $g(t)$ 이다. 즉 g 는 h 의 역함수이다.

3단계: 적분 구간의 끝점을 s 로 바꾸기.

- $t = \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{s^3}{1+s} = \dfrac{1}{2}$ 에서 $2s^3 - s - 1 = 0$. $s=1$ 을 넣으면 성립하므로 $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.
- $t = \dfrac{27}{4}$: $4s^3 = 27(1+s)$. $s=3$ 을 넣으면 $108 = 108$ 이므로 $g\left(\dfrac{27}{4}\right) = 3$.

(h 가 증가함수라 해는 하나뿐이므로, 하나 찾으면 그것이 답이다.)

4단계: 치환하여 계산. $t = h(s)$ 로 치환하면 $g(t) = s$, $dt = h'(s)\,ds$ 이고 s 는 1 에서 3 까지 변한다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt = \int_1^3 s\,h'(s)\,ds$$

$h'(s)$ 를 직접 곱하기보다 부분적분으로 h 를 그대로 쓰는 편이 간단하다.

$$\int_1^3 s\,h'(s)\,ds = \Big[s\,h(s)\Big]_1^3 - \int_1^3 h(s)\,ds$$

- 앞부분: $3 \cdot \dfrac{27}{4} - 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{81}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{79}{4}$
- 뒷부분: 분자의 차수가 높으므로 나눗셈을 한다. $s^3 = (s+1)(s^2 - s + 1) - 1$ 이므로

$$\frac{s^3}{1+s} = s^2 - s + 1 - \frac{1}{1+s}$$

$$\int_1^3 h(s)\,ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + s - \ln(1+s)\right]_1^3 = \frac{26}{3} - 4 + 2 - (\ln 4 - \ln 2) = \frac{20}{3} - \ln 2$$

5단계: 결과.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt = \frac{79}{4} - \frac{20}{3} + \ln 2 = \frac{237-80}{12} + \ln 2 = \frac{157}{12} + \ln 2$$

정답은 ⑤이다.

검토. g 는 1 에서 3 까지 증가하는 함수이므로 적분값은 $1 \times \frac{25}{4}$ 와 $3 \times \frac{25}{4}$ 사이, 즉 6.25 와 18.75 사이여야 한다. $\frac{157}{12} + \ln 2 \approx 13.78$ 로 범위 안에 있다.

실수 포인트

- 거리를 $f(s) - sf'(s)$ (접선의 y 절편 자체)로 놓는 실수. 구하는 것은 두 점 **사이의 거리**이므로 $f(s)$ 가 소거되어 $sf'(s)$ 만 남는다.
- $g(t)$ 를 t 의 식으로 직접 구하려고 시간을 쓰는 것. 삼차방정식을 풀어야 하므로 불가능에 가깝다. "역함수의 적분은 치환"이 정석이다.
- 치환 후 적분 구간을 $\frac{1}{2}$, $\frac{27}{4}$ 그대로 두는 실수. 반드시 $s = 1$, $s = 3$ 으로 바꾼다.
- $\frac{s^3}{1+s}$ 의 나눗셈에서 나머지 -1 의 부호를 틀려 $-\ln 2$ 가 되는 실수(보기에 $+\ln 2$ 만 있으니 부호가 다르면 다시 확인).

다른 풀이

넓이로 보는 방법. s 를 가로축, t 를 세로축으로 하여 증가하는 곡선 $t = h(s)$ 를 그리면, $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$ 는 곡선과 t 축 사이($\frac{1}{2} \le t \le \frac{27}{4}$)의 넓이이다. 이는 큰 직사각형 $3 \times \frac{27}{4}$ 에서 작은 직사각형 $1 \times \frac{1}{2}$ 과 곡선 아래 넓이 $\int_1^3 h(s)\,ds$ 를 뺀 것과 같아서, 위의 부분적분 식과 정확히 같은 계산이 된다.

식을 구할 수 없는 역함수가 나오면, 원래 함수 쪽 변수로 치환해서 적분하는 길을 먼저 떠올리자.

29 미적분 › 수열의 극한 › 급수(등비급수)

4점 단답형 난이도 ●●●●○

정답 97

핵심 아이디어

등비수열의 연속한 세 항은 "가운데 항의 제곱 = 양 끝 항의 곱"을 만족한다. 이 한 줄로 a_1 이 결정되고, 그다음 급수의 부등식으로 k 가 결정된다.

풀이

1단계(조건 해석): 문자 줄이기. 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1 = d$ $(d \neq 0)$ 라 하면

$$a_n = d + (n-1)d = dn$$

상자 안 조건은 $\{b_n\}$ 의 연속한 세 항이

$$b_{k+1} = \frac{1}{d} - 1, \quad b_{k+2} = \frac{1}{2d} - 1, \quad b_{k+3} = \frac{1}{3d} - 1$$

이라는 뜻이다.

2단계: d 구하기. 계산이 편하도록 $u = \frac{1}{d}$ 로 놓는다. 세 항이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$\left(\frac{u}{2} - 1\right)^2 = (u-1)\left(\frac{u}{3} - 1\right)$$

$$\frac{u^2}{4} - u + 1 = \frac{u^2}{3} - \frac{4}{3}u + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{u^2}{12} - \frac{u}{3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(u-4) = 0$$

$u=\dfrac{1}{d}\neq 0$ 이므로 $u=4$, 즉 $d=\dfrac{1}{4}$ 이고 $a_n=\dfrac{n}{4}$ 이다. 이때

$$b_{k+1}=3,\quad b_{k+2}=1,\quad b_{k+3}=\frac{1}{3}$$

이므로 $\{b_n\}$ 의 공비는 $\dfrac{1}{3}$ 이다. $b_{k+2}=1$ 을 기준으로 쓰면

$$b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-(k+2)}=3^{\,k+2-n}$$

3단계: 급수 계산. 공비가 $\dfrac{1}{3}$ 이라 $\sum b_n$ 은 수렴하고, $\sum \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$ 도 아래처럼 수렴하므로 두 급수를 따로 계산해서 빼도 된다.

- 등비급수: 첫째항이 $b_1=3^{k+1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{3^{k+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3^{k+2}}{2}$$

- 부분분수: $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{16}{n(n+1)}=16\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ 이므로 부분합은 $16\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=16$$

4단계: k 결정. 부등식은

$$0<\frac{3^{k+2}}{2}-16<30 \quad\Longleftrightarrow\quad 32<3^{k+2}<92$$

3 의 거듭제곱 $27,\ 81,\ 243$ 중 이 범위에 있는 것은 $81=3^4$ 뿐이므로 $k=2$ 이다. 따라서 $b_n=3^{4-n}$.

5단계: 답 구하기. $\{b_{2n}\}$ 은 첫째항이 $b_2=9$, 공비가 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$$

$a_2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$a_2\times\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{81}{8}=\frac{81}{16}$$

16 과 81 은 서로소이므로 $p=16$, $q=81$, $p+q=97$ 이다.

검토. $k=2$ 일 때 $b_3=3=\dfrac{1}{a_1}-1$, $b_4=1=\dfrac{1}{a_2}-1$, $b_5=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{a_3}-1$ 로 조건이 모두 맞고, 급수의 차는 $\dfrac{81}{2}-16=\dfrac{49}{2}$ 로 0 과 30 사이에 있다.

실수 포인트

- $\{b_{2n}\}$ 의 공비를 $\dfrac{1}{3}$ 으로 그대로 쓰는 실수. 한 칸씩 건너뛰므로 공비는 $\dfrac{1}{9}$ 이다.
- $\dfrac{q}{p}$ 에서 p 가 분모, q 가 분자다. 이 문제는 합을 묻기 때문에 답이 같지만, 평소에 분모·분자 문자를 확인하는 습관을 들이자.
- $\sum b_n$ 의 첫째항을 $b_{k+1}=3$ 으로 착각하는 실수. 급수는 $n=1$ 부터이므로 첫째항은 $b_1=3^{k+1}$ 이다. 여기에 k 가 들어 있어야 부등식으로 k 를 정할 수 있다.

미지수가 많아 보여도 조건 하나에 문자 하나씩 차례로 정해진다. 순서대로 풀자.

30 미적분 › 미분법 › 도함수의 활용(방정식의 실근의 개수)
4점 단답형 난이도 ●●●●●

정답 11

핵심 아이디어

식이 주어진 것은 f 가 아니라 역함수 f^{-1} 이므로, 그림 전체를 직선 $y=x$ 에 대하여 뒤집어 **곡선 $y=f^{-1}(x)$ 와 점 $(0,1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{m}$ 인 직선**의 문제로 바꾼다. 역함수의 그래프를 그리면 원점에 대하여 대칭이고, 이 대칭성을 쓰면 개수가 달라지는 경계인 접선을 지수함수 $y=e^{x-1}+1$ 쪽에서 구할 수 있다.

풀이

1. 역함수의 식과 그래프

$p(x)=f^{-1}(x)$ 라 하자. f 가 증가하는 연속함수이므로 p 도 증가하는 연속함수이다. 조건 (가), (나)는 제곱·절댓값으로 주어져 부호가 정해지지 않았으므로 "증가"와 "연속"으로 부호를 정한다.

- $|x|\le 1$: (가)에서 $p(x)=\pm\dfrac{x(x^2-5)}{2}$. 함수 $\dfrac{x(x^2-5)}{2}$ 는 도함수 $\dfrac{3x^2-5}{2}$ 가 이 구간에서 음수라 감소하므로, 증가하는 쪽인 반대 부호를 택한다. 이때 $p(1)=2$, $p(-1)=-2$.
- $x>1$: $|p(x)|=e^{x-1}+1$ 이고 $p(1)=2$ 와 이어져야 하므로 $p(x)=e^{x-1}+1$.
- $x<-1$: $|p(x)|=e^{-x-1}+1$ 이고 $p(-1)=-2$ 와 이어져야 하므로 $p(x)=-e^{-x-1}-1$.

$$p(x)=\begin{cases}-e^{-x-1}-1 & (x<-1)\\ \dfrac{5x-x^3}{2} & (-1\le x\le 1)\\ e^{x-1}+1 & (x>1)\end{cases}$$

그래프를 그리기 위해 확인할 것은 세 가지다.

- **대칭성**: 모든 x 에서 $p(-x)=-p(x)$ 이다. 곡선 $y=p(x)$ 는 **원점에 대하여 대칭**이다.
- **이음매**: $p'(x)$ 는 차례로 e^{-x-1}, $\dfrac{5-3x^2}{2}$, e^{x-1} 이고 $x=\pm1$ 에서 양쪽 값이 모두 1 이라 매끄럽게 이어진다.
- **볼록성**: $p''(x)$ 는 차례로 $-e^{-x-1}$, $-3x$, e^{x-1} 이므로 $x>0$ 에서는 $0<x<1$ 에서 위로 볼록, $x>1$ 에서 아래로 볼록이다($x<0$ 은 대칭).

2. $y=x$ 에 대하여 뒤집기

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=m(x-1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y=p(x)$ 와 직선 $x=m(y-1)$ 이 된다. 대칭이동해도 교점의 개수는 변하지 않는다.

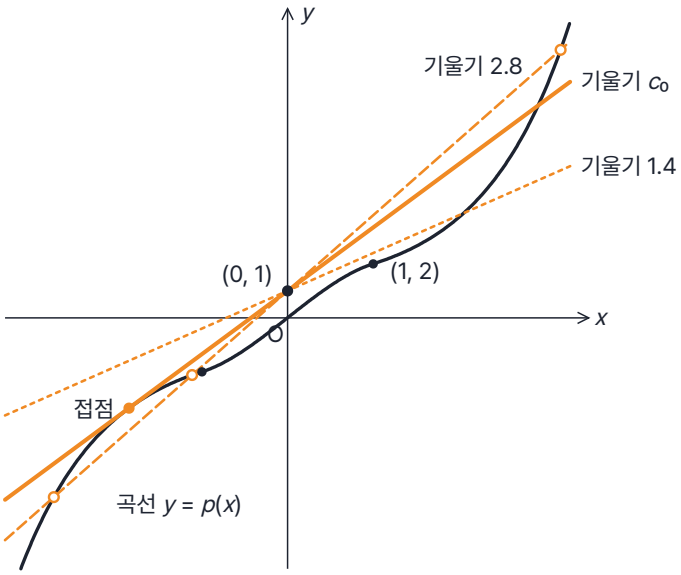
- $m=0$ 이면 직선은 $x=0$ (y 축)이고 곡선과 원점에서만 만난다. $g(0)=1$.
- $m\neq 0$ 이면 직선은

$$y=\frac{1}{m}x+1$$

즉 **점 $(0,1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{m}$ 인 직선**이다.

이하 $c=\dfrac{1}{m}$ 이라 하고, 곡선 $y=p(x)$ 와 직선 $y=cx+1$ 의 교점의 개수를 센다.

3. 그래프에서 교점의 개수 세기



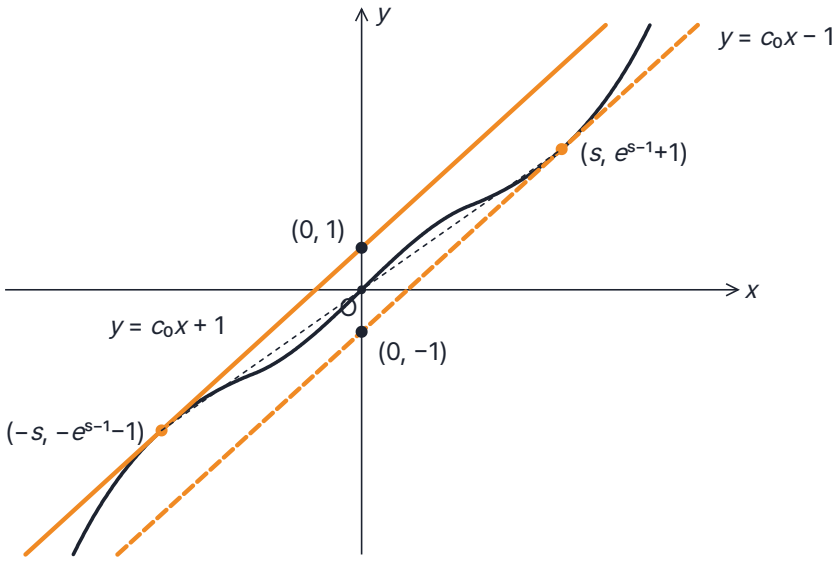
(그림: 세로 방향을 줄여 그렸다. 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이 기울기 1.4 일 때 1 번, 왼쪽 가지에 접하는 기울기 c_0 일 때 2 번, 기울기 2.8 일 때 3 번 곡선과 만난다.)

- $c < 0$: 감소하는 직선과 증가하는 곡선은 한 번만 만난다. 1 개.
- $c > 0$, $x > 0$ **쪽**: $x = 0$ 에서 곡선(0)이 직선(1)보다 아래에 있고, 멀리 가면 지수함수가 직선을 앞지르므로 한 번 만난다. $c = 1$ 일 때 직선 $y = x + 1$ 은 점 $(1, 2)$ 에서 곡선에 접하지만, 그 점에서 곡선의 볼록한 방향이 바뀌므로 직선이 곡선을 뚫고 지나가 교점은 여전히 하나다. 항상 1 개.
- $c > 0$, $x < 0$ **쪽**: $x = 0$ 부근에서도, 왼쪽 멀리에서도 곡선이 직선보다 아래에 있다(왼쪽 가지는 지수함수 꼴로 급하게 내려간다). 직선이 완만하면 곡선에 닿지 못하고, 가파르면 곡선 아래로 파고들어 두 번 만난다. 그 경계는 **직선이 왼쪽 가지에 접할 때**이고, 그때의 기울기를 c_0 이라 하면

$$c < c_0 : \ 0\text{개}, \qquad c = c_0 : \ 1\text{개}, \qquad c > c_0 : \ 2\text{개}$$

4. 대칭성으로 접선 구하기

점 $(0, 1)$ 에서 왼쪽 가지 $y = -e^{-x-1} - 1$ 에 그은 접선을 원점에 대하여 대칭이동하면, **점 $(0, -1)$ 에서 오른쪽 가지 $y = e^{x-1} + 1$ 에 그은 접선**이 된다. 원점 대칭은 기울기를 바꾸지 않으므로 두 접선의 기울기는 같다.



(그림: 실선은 점 $(0,1)$ 에서 왼쪽 가지에 그은 접선, 파선은 그것을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이다.)

오른쪽 가지 위의 접점을 $(s,\ e^{s-1}+1)$ $(s>1)$ 이라 하면 접선의 기울기는 e^{s-1} 이고, 이 접선이 $(0,-1)$ 을 지나므로

$$\frac{(e^{s-1}+1)-(-1)}{s-0}=e^{s-1} \quad\Longrightarrow\quad (s-1)e^{s-1}=2$$

$c_0=e^{s-1}$ 이므로 $s-1=\ln c_0$ 이고

$$c_0\ln c_0=2$$

c_0 의 값 자체는 구할 수 없지만 이 관계식이면 충분하다. ($s>1$ 에서 $(s-1)e^{s-1}$ 은 0 에서부터 증가하므로 이런 s 는 하나뿐이고, $c_0>1$ 이다.)

5. 개수 확인(기울기 함수)

3에서 그림으로 읽은 개수를 식으로 확인해 둔다. 점 $(0,\pm1)$ 과 곡선 위의 점 $(x,p(x))$ 를 잇는 직선의 기울기를 보면 된다.

$x>0$, 점 $(0,1)$. $q(x)=\dfrac{p(x)-1}{x}$ 라 하면 교점의 개수는 $q(x)=c$ 의 근의 개수다.

$$q'(x)=\frac{r(x)}{x^2},\qquad r(x)=xp'(x)-p(x)+1,\qquad r'(x)=x\,p''(x)$$

$r(0)=1$ 에서 출발해 $0<x<1$ 에서 감소($p''<0$)하여 $r(1)=1-2+1=0$ 이 되고, $x>1$ 에서 증가($p''>0$)한다. 따라서 $r(x)\ge 0$ 이고 q 는 증가한다. $x\to 0+$ 일 때 $q\to-\infty$, $x\to\infty$ 일 때 $q=\dfrac{e^{x-1}}{x}\to\infty$ 이므로 모든 c 에 대하여 근은 정확히 1 개다.

$x<0$, 점 $(0,1)$. 대칭성에 의해 $x>0$ 에서 점 $(0,-1)$ 을 지나는 직선으로 바꿔 센다. $Q(x)=\dfrac{p(x)+1}{x}$ 라 하면

$$Q'(x)=\frac{R(x)}{x^2},\qquad R(x)=xp'(x)-p(x)-1,\qquad R'(x)=x\,p''(x)$$

$R(0)=-1$ 에서 감소하여 $R(1)=-2$ 가 되고, $x>1$ 에서는 $R(x)=(x-1)e^{x-1}-2$ 가 증가하여 $x=s$ 에서 0 이 된다. 따라서 Q 는 $0<x<s$ 에서 감소, $x>s$ 에서 증가하고 최솟값은 $Q(s)=c_0$ 이다. $x\to0+$, $x\to\infty$ 일 때 모두 $Q\to\infty$ 이므로($\dfrac{e^{x-1}}{x}\to\infty$ 는 문제의 단서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 과 같은 내용이다) 근의 개수는 $c<c_0$ 일 때 0, $c=c_0$ 일 때 1, $c>c_0$ 일 때 2 이다.

6. $g(m)$ 과 답

$c = \dfrac{1}{m}$ 로 되돌린다.

- $m < 0$: $c < 0$ 이므로 $g(m) = 1$
- $m = 0$: $g(0) = 1$
- $0 < m < \dfrac{1}{c_0}$: $c > c_0$ 이므로 $g(m) = 1 + 2 = 3$
- $m = \dfrac{1}{c_0}$: $g(m) = 1 + 1 = 2$
- $m > \dfrac{1}{c_0}$: $0 < c < c_0$ 이므로 $g(m) = 1$

$$g(m) = \begin{cases} 1 & (m \le 0) \\ 3 & \left(0 < m < \frac{1}{c_0}\right) \\ 2 & \left(m = \frac{1}{c_0}\right) \\ 1 & \left(m > \frac{1}{c_0}\right) \end{cases}$$

불연속인 곳은 $m = 0$ 과 $m = \dfrac{1}{c_0}$ 두 곳이므로 $a = 0$, $b = \dfrac{1}{c_0}$ 이다.

- $g(a) = g(0) = 1$, $\lim\limits_{m \to 0+} g(m) = 3$
- $g(b) = 2$
- $\ln b = -\ln c_0$ 이므로 $\dfrac{\ln b}{b} = -c_0 \ln c_0 = -2$, 따라서 $\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2 = 4$

$$g(a) \times \lim_{m \to a+} g(m) + g(b) \times \left(\frac{\ln b}{b}\right)^2 = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$$

실수 포인트

- (가), (나)에서 부호를 정하지 않고 넘어가는 실수. "증가"로 $|x| \le 1$ 의 부호를, "연속"으로 $|x| > 1$ 의 부호를 정해야 한다. 특히 $x < -1$ 에서 $p(x)$ 가 **음수**라는 점을 놓치기 쉽다.
- 뒤집으면 직선의 기울기가 m 에서 $\dfrac{1}{m}$ 로, 지나는 점이 $(1, 0)$ 에서 $(0, 1)$ 로 바뀐다. 이를 잊고 $b = c_0$ 로 두면 $\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$ 이 깔끔한 값으로 나오지 않는다.
- $m = 0$ 을 불연속점에서 빠뜨리는 실수. 접할 때만 개수가 바뀐다고 생각하면 $m = \dfrac{1}{c_0}$ 하나만 찾게 된다. $m \to 0+$ 이면 뒤집은 직선이 한없이 가팔라져($c \to \infty$) 곧바로 3 번 만난다.
- 점 $(1, 2)$ 에서의 접선 $y = x + 1$ 이 $(0, 1)$ 을 지난다고 해서 $m = 1$ 을 불연속점으로 세는 실수. 이 접선은 곡선을 뚫고 지나가므로 개수가 변하지 않는다.

다른 풀이

대칭성을 쓰지 않는 계산. $x < 0$ 쪽을 그대로 조사해도 된다. $x < -1$ 에서 $r(x) = xp'(x) - p(x) + 1 = (x + 1)e^{-x-1} + 2$ 는 증가함수이고 $r(-1) = 2 > 0$, $x \to -\infty$ 일 때 $r(x) \to -\infty$ 이므로 $r(x_0) = 0$ 인 $x_0 < -1$ 이 하나 있다. $-1 \le x < 0$ 에서는 r 이 2 에서 1 로 감소하므로 양수다. 따라서 $q(x) = \dfrac{p(x) - 1}{x}$ 는 $x = x_0$ 에서 최솟값 $c_0 = p'(x_0) = e^{-x_0-1}$ 을 갖고, $r(x_0) = 0$ 에 $-x_0 - 1 = \ln c_0$ 을 넣으면 같은 식 $c_0 \ln c_0 = 2$ 를 얻는다.

f 를 직접 쓰는 계산. $x>2$ 에서 $f(x)=1+\ln(x-1)$, $x<-2$ 에서 $f(x)=-1-\ln(-x-1)$ 이다. 점 $(1,0)$ 에서 $x<-2$ 부분에 그은 접선의 접점을 $(u, f(u))$ 라 하고 $w=-u-1$ 로 놓으면, 기울기는 $\dfrac{1}{w}$ 이고 접선이 $(1,0)$ 을 지날 조건이 $w\ln w=2$ 가 된다. $b=\dfrac{1}{w}$ 이므로 같은 결론을 얻는다. 다만 $|x|\le 2$ 에서는 f 의 식을 쓸 수 없으므로 전체 개수 조사는 역함수 쪽에서 하는 것이 안전하다.

역함수가 주어지면 그림을 통째로 $y=x$ 에 대해 뒤집고, 뒤집은 그래프의 대칭성부터 찾자. 구할 수 없는 값은 "관계식"만 챙기면 된다.

문제 저작권: 한국교육과정평가원 / 해설: 자체 제작